§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. MỤC ĐÍCH

1. Nắm được định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng, từ đó nắm được định nghĩa hai mặt phẳng vuông góc.

2. Nắm được điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau và định lí về giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba để vận dụng làm các bài toán hình học không gian.

3. Nắm được định nghĩa hình lăng trụ đứng, chiều cao của hình lăng trụ đứng và các tính chất của hình lăng trụ đứng.

4. Nắm được định nghĩa hình chóp đều, hình chóp cụt đều và các tính chất của các hình đó.

B. NỘI DUNG

1. Trước khi trình bày định nghĩa hai mặt phẳng vuông góc chúng ta cần phải giới thiệu về định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng. Trong SGK định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Sau đó SGK có trình bày cách xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau mà về thực chất có thể coi như đây là một định nghĩa khác về góc giữa hai mặt phẳng và dễ thấy rằng hai định nghĩa trên là tương đương.

2. Sau khi định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng ta đưa ra một tính chất nói về diện tích hình chiếu của một đa giác. Đó là tính chất :

Nếu một đa giác nằm trong mặt phẳng (α) có diện tích S thì diện tích hình chiếu vuông góc S' của nó trên mặt phẳng (β) bằng tích của S với $\cos\varphi$, với φ là góc giữa (α) và (β).

$$S' = S\cos\varphi.$$

Ví dụ 1 nêu lên bài toán áp dụng để tính góc giữa hai mặt phẳng. Tiếp đó tính diện tích tam giác SBC khi biết diện tích hình chiếu của tam giác đó và góc φ giữa mặt phẳng chứa tam giác và mặt phẳng chiếu.

3. Các định lí liên quan đến hai mặt phẳng vuông góc :

a) Cần làm cho học sinh nắm được định lí 1 về điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia. Đây là một định lí quan trọng thường dùng để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Định lí này có hai hệ quả sau đây :

• Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng kia.

Cần lưu ý để học sinh đừng nhầm lẫn rằng mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này thì vuông góc với mặt phẳng kia (mà cần phải có điều kiện vuông góc với giao tuyến).

Mặt khác cũng cần làm cho học sinh hiểu rằng qua một điểm M nằm ngoài mặt phẳng (α) ta có thể dựng được vô số mặt phẳng đi qua M và vuông góc với (α). Tất cả các mặt phẳng này đều chứa đường thẳng đi qua M và vuông góc với (α).

• Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm A thuộc (α) ta dựng đường thẳng d vuông góc với (β) thì d nằm trong (α).

b) Ngoài ra ta còn có định lí 2 nói về hai mặt phẳng (α) và (β) cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba là (γ) và cắt nhau theo giao tuyến d thì d vuông góc với (γ).

• *Hoạt động 1* nhằm củng cố định lí 1 trong trường hợp nếu hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Nếu có đường thẳng $\Delta \subset (\alpha)$ và $\Delta \perp d$ thì $\Delta \perp (\beta)$ vì góc giữa (α) và (β) là góc vuông. (Khi đó ta dễ dàng suy ra Δ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc (β).)

• *Hoạt động 2* là trường hợp vận dụng định lí 1 trong một trường hợp cụ thể là muốn chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì cần phải làm thế nào.

• *Hoạt động 3* đưa ra trường hợp cụ thể để áp dụng định lí 1. Các mặt phẳng lần lượt chứa SB, SC, SD đều phải chứa SA vì SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và khi đó các mặt phẳng (SA, SB), (SA, SC) và (SA, SD) đều vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Còn mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD) vì (SBD) chứa đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng (SAC) (vì $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$).

4. Về hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương, giáo viên cần lưu ý các nội dung sau :

a) Khái niệm về hình lăng trụ và hình hộp đã được trình bày trong chương II nói về quan hệ song song. Trong quan hệ vuông góc ta giới thiệu thêm về khái niệm hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên bằng nhau và vuông góc với các mặt đáy. Ở đây vì chưa có khái niệm khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song nên ta định nghĩa chiều cao của hình lăng trụ đứng là bằng độ dài cạnh bên.

Cần cho học sinh nắm được định nghĩa hình lăng trụ đều, hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác, hình lăng trụ đứng ngũ giác v.v..., hình hộp đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương.

b) Học sinh cần nắm được các tính chất của hình lăng trụ đứng. Từ các tính chất nói về quan hệ song song và quan hệ vuông góc mà suy ra các tính chất riêng của hình lăng trụ đứng. Cần lưu ý tới hai hình lăng trụ đứng đặc biệt là hình hộp chữ nhật và hình lập phương cùng những tính chất đặc biệt của hai hình đó.

Hoạt động 4 nhằm giúp cho học sinh nhận ra mối quan hệ giữa các khái niệm : hình lăng trụ đứng, hình hộp, hình hộp chữ nhật, hình lăng trụ. Ta có :

a) sai ; b) đúng ; c) sai ; d) đúng.

Hoạt động 5

+ Sáu mặt của hình hộp chữ nhật đều là những hình chữ nhật.

+ Hình lập phương là hình hộp có tất cả các mặt đều là hình vuông.

Ví dụ 2 nhằm giới thiệu bài toán tìm thiết diện của hình lập phương (là một hình lăng trụ đặc biệt) khi bị cắt bởi một mặt phẳng đặc biệt (là mặt phẳng trung trực của đoạn AC' của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$).

5. Khi định nghĩa về hình chóp đều ta cần lưu ý rằng hình chóp đều có đáy là đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

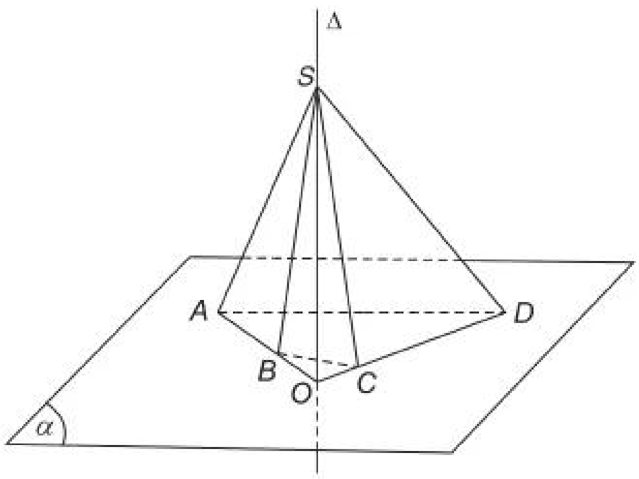
Trước khi định nghĩa hình chóp cụt đều ta có đưa ra định nghĩa hình chóp cụt và tiếp đó ta nói rằng phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt tất cả các cạnh bên của hình chóp được gọi là hình chóp cụt đều. Sau đó SGK đề cập tới tính chất của cạnh bên, mặt bên của hình chóp cụt đều và định nghĩa đường cao của hình chóp cụt đều.

Hoạt động 6

Vì hình chóp đều có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy nên ta suy ra hình chóp đều có các cạnh bên bằng nhau. Do đó các mặt bên của một hình chóp đều là những tam giác cân bằng nhau và các mặt bên của hình chóp cụt đều là những hình thang cân bằng nhau.

Hoạt động 7

Trong mặt phẳng (α) ta lấy tứ giác $ABCD$ có hai cạnh AB và CD cắt nhau tại O. Trên đường thẳng Δ vuông góc với (α) tại O ta lấy một điểm S ngoài (α) và lập nên hình chóp $S.ABCD$. Hai mặt bên (SAB) và (SCD) đều vuông góc với mặt phẳng đáy vì chúng đều chứa đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (α) (h.3.16)



Hình 3.16

C. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

1. a) Đúng ; b) Sai.

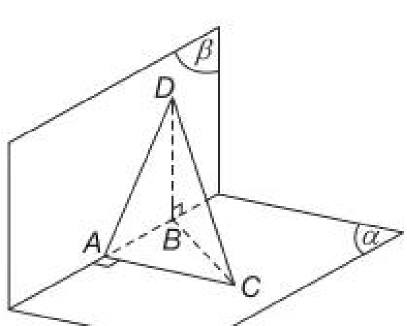
2. $CA \perp AB$ (giao tuyến), do đó $CA \perp DA$ nên ΔADC vuông ở A.

$DB \perp AB$ (giao tuyến) nên ΔBAD vuông ở B.

Do đó $CD^2 = CA^2 + DA^2 = CA^2 + DB^2 + AB^2$

$$= 6^2 + 24^2 + 8^2 = 676.$$

$CD = \sqrt{676} = 26$ (cm). (h.3.17)



Hình 3.17

3. a) $\left.\begin{array}{l} AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp BC \\ \text{Theo giả thiết } AB \perp BC \end{array}\right\}$

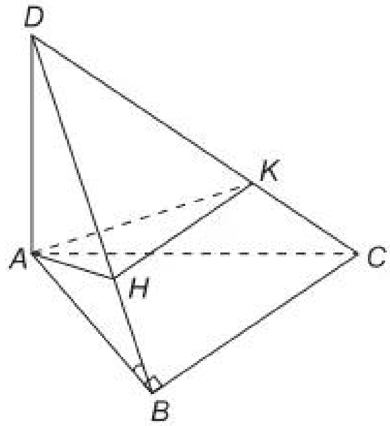
$\Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp BD.$

$\left.\begin{array}{l} AB \perp BC \\ BD \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC). (h.3.18)

b) Vì $BC \perp (ABD)$ nên $(BCD) \perp (ABD)$.

c) $DB \perp (AHK)$ tại H nên $DB \perp AH$

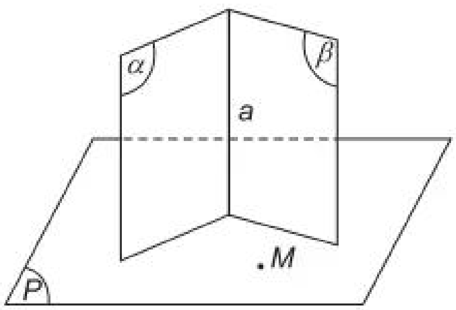
và $DB \perp HK$.



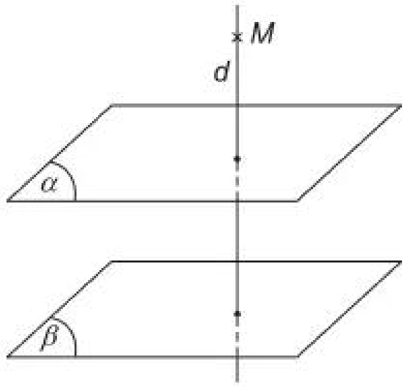
Hình 3.18

Trong mặt phẳng (BCD) ta có $HK \perp BD$ và $BC \perp BD$ do đó $HK \,//\, BC$.

4. Gọi $a = (\alpha) \cap (\beta)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với a. Vì $a \subset (\alpha)$ và $a \perp (P)$ nên $(P) \perp (\alpha)$. Tương tự ta chứng minh được $(P) \perp (\beta)$. Như vậy qua điểm M có mặt phẳng (P) vuông góc với (α) và (β). (h.3.19)



Hình 3.19



Hình 3.20

Ngược lại nếu có mặt phẳng (P) đi qua điểm M và (P) vuông góc với (α) và (β) thì ta suy ra $(P) \perp a$. Do tính duy nhất của mặt phẳng đi qua một điểm M và vuông góc với đường thẳng a nên mặt phẳng (P) là duy nhất.

• Nếu $(\alpha) \,//\, (\beta)$, ta gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (α). Khi đó ta có $d \perp (\beta)$ và mọi mặt phẳng (P) chứa d đều vuông góc với (α) và (β). Vậy khi $(\alpha) \,//\, (\beta)$ có vô số mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với (α) và (β). (h.3.20)

5. a) Ta có $AB' \perp BA'$ và $AB' \perp B'C' \Rightarrow AB' \perp BC$ vì $BC \,//\, B'C'$.

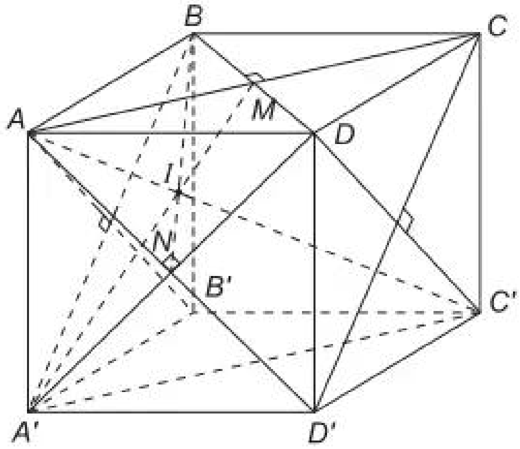
Do đó $AB' \perp (BA'C)$ hay $AB' \perp (BCD'A')$. Mặt phẳng $(AB'C'D)$ chứa $AB' \perp (BCD'A')$ nên ta suy ra $(AB'C'D) \perp (BCD'A')$. (h.3.21)

b) $BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC'$ (1)

$$\left.\begin{array}{l}(ABC'D') \perp (ADD'A') \\ (ABC'D') \perp (A'B'CD)\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow DA' \perp (ABC'D') \Rightarrow AC' \perp DA'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC' \perp (BDA')$.



Hình 3.21

6. a) Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$.

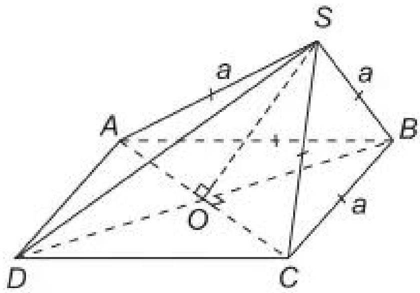
Ta có : $\left.\begin{array}{l}AC \perp BD \\ AC \perp SO\end{array}\right\}$

$\Rightarrow AC \perp (SBD)$

$\Rightarrow (ABCD) \perp (SBD)$. (h.3.22)

b) Vì $SA = SB = SC = a$ và $AB = BC = a$ nên ba tam giác SAC, BAC, DAC cân và bằng nhau. Do đó $OS = OB = OD$.

Từ đó suy ra SBD là tam giác vuông tại S.



Hình 3.22

7. a) Vì $\left.\begin{array}{l}AD \perp AB \\ AD \perp AA'\end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (ABB'A')$ (h.3.23)

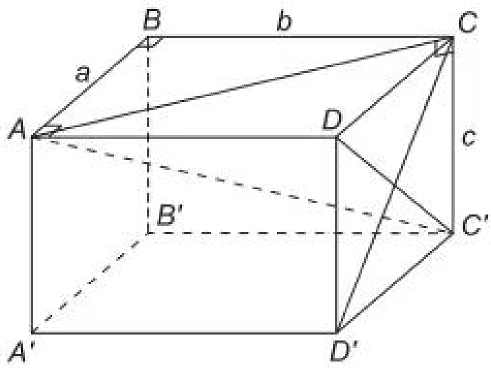
Mặt phẳng $(ADC'B')$ chứa AD nên ta suy ra $(ADC'B') \perp (ABB'A')$

b) Ta có $AC'^2 = AC^2 + CC'^2$

$$AC'^2 = AB^2 + BC^2 + CC'^2$$

$$AC'^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Vậy $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



Hình 3.23

8. Hình lập phương cạnh a có độ dài đường chéo là $a\sqrt{3}$.

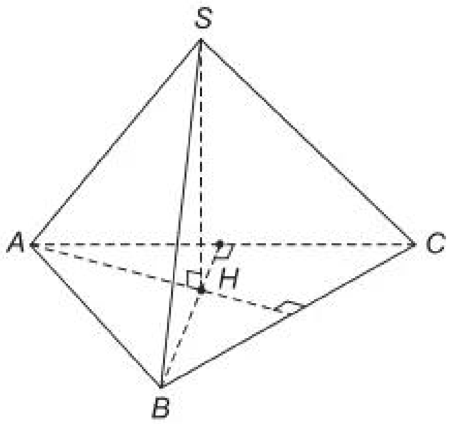
9. Vì H là tâm của tam giác đều nên ta có $BC \perp AH$ và $BC \perp SH$.

$$\left.\begin{matrix} BC \perp AH \\ BC \perp SH \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAH)$$

$$\Rightarrow BC \perp SA \text{ (h.3.24)}$$

Tương tự ta có $\left.\begin{matrix} AC \perp BH \\ \text{và } AC \perp SH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (SBH)$

$$\Rightarrow AC \perp SB.$$



Hình 3.24

10. a) Ta có tứ giác $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a và $SO \perp (ABCD)$. Do đó :

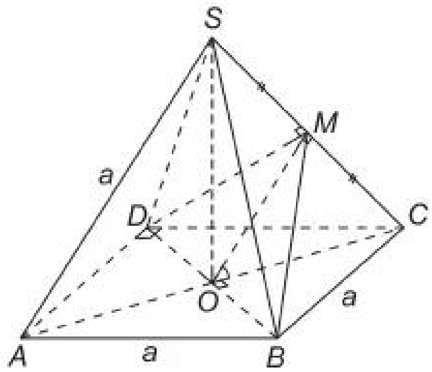
$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot$$

b) SBC là tam giác đều cạnh a nên $BM \perp SC$, tương tự $DM \perp SC$

$$\left.\begin{matrix} BM \perp SC \\ DM \perp SC \end{matrix}\right\} \Rightarrow SC \perp (BDM)$$

Do đó $(SAC) \perp (BDM)$. (h.3.25)



Hình 3.25

c) $OM^2 = OC^2 - MC^2$ vì OMC là tam giác vuông tại M.

$$OM^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}\cdot \text{ Vậy } OM = \frac{a}{2}\cdot$$

(Có thể lí luận rằng vì SOC là tam giác vuông tại O nên đường trung tuyến $OM = \frac{SC}{2} = \frac{a}{2}$)

Vì $MO \perp BD$ và $CO \perp BD$ nên $\widehat{MOC}$ là góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

Mặt khác ta có $OM = \dfrac{a}{2}$ và $MC = \dfrac{a}{2}$ mà $\widehat{OMC} = 90^{\circ}$ nên ta suy ra $\widehat{MOC} = 45^{\circ}$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ bằng 45°.

11. a) Vì $BD \perp AC$ và $BD \perp SC$ nên $BD \perp (SAC)$. Ta suy ra $(SBD) \perp (SAC)$. (h.3.26)

b) Hình thoi $ABCD$ được tạo thành bởi hai tam giác đều chung đáy. Hai tam giác vuông SCA và IKA đồng dạng nên ta có :

$$\frac{IK}{SC} = \frac{AI}{SA} \qquad (1)$$

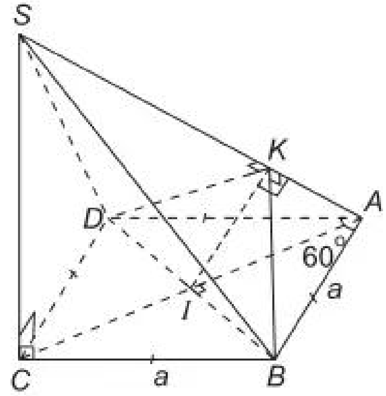
Theo định lí Py-ta-go ta có :

$$SA^2 = SC^2 + CA^2$$

$$= \frac{6a^2}{4} + \left(a\sqrt{3}\right)^2 = \frac{18a^2}{4}.$$

$$\Rightarrow SA = \frac{3\sqrt{2}}{2}a \text{ thay vào (1)}$$

$$IK = \frac{SC.AI}{SA} = \frac{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a} = \frac{a}{2}.$$



Hình 3.26

c) Vì $IK = IB = ID = \dfrac{a}{2}$ nên ΔBKD là tam giác vuông tại K hay $\widehat{BKD} = 90^{\circ}$.

$\left.\begin{array}{l} SA \perp DB \\ SA \perp IK \end{array}\right\} \Rightarrow SA \perp (BDK) \Rightarrow SA \perp BK$ và $SA \perp DK$. Vậy $\widehat{BKD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) và $\widehat{BKD} = 90^{\circ}$ nên ta suy ra $(SAB) \perp (SAD)$.