§5. KHOẢNG CÁCH

A. MỤC ĐÍCH

1. Nắm được định nghĩa các loại khoảng cách trong không gian :

– Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng ;

– Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng ;

– Khoảng cách từ một đường thẳng đến một mặt phẳng song song với đường thẳng đó ;

– Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song ;

– Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

2. Nắm được các tính chất về khoảng cách và biết cách tính khoảng cách trong các bài toán đơn giản.

3. Biết cách xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau và đồng thời biết xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau đó.

4. Nắm được mối liên hệ giữa các loại khoảng cách để đưa các bài toán phức tạp này về các bài toán khoảng cách đơn giản.

B. NỘI DUNG

1. Trong SGK ta đã nêu định nghĩa khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng như sau :

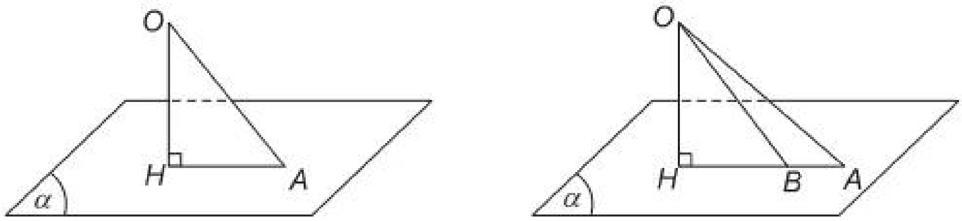
Cho điểm O cho trước và đường thẳng a. Trong mặt phẳng (O, a) gọi H là hình chiếu của O trên a. Khi đó độ dài đoạn thẳng OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a.

Khi trình bày tính chất của khoảng cách ta cần lưu ý để học sinh thấy rằng khoảng cách này là nhỏ nhất so với các khoảng cách từ O đến một điểm M bất kì của đường thẳng a.

Hoạt động 1. Gọi OH là khoảng cách từ O đến đường thẳng a. Xét trong mặt phẳng (O, a), ta lấy một điểm M bất kì trên a và luôn luôn có $OM \geq OH$ (kể cả trường hợp điểm O thuộc a).

2. Để xây dựng khái niệm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng ta dựa vào định lí nói rằng có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một mặt phẳng (α) cho trước. Nếu gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên (α) hay H là giao điểm của đường thẳng a đi qua O và vuông góc với (α) thì độ dài đoạn thẳng OH gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α). Khi nói về khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α), ta cần lưu ý rằng khoảng cách này là nhỏ nhất trong các khoảng cách từ O tới một điểm A bất kì của mặt phẳng (α). (dùng định lí Py-ta-go)

Hoạt động 2 nhằm củng cố tính chất của khoảng cách và một số tính chất có liên quan đến đoạn xiên và hình chiếu của đoạn xiên. (h.3.27)



a) $OH \leq OA, \forall A \in (\alpha)$ b) $OA > OB \Leftrightarrow HA > HB$

Hình 3.27

3. Về khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giáo viên cần lưu ý để học sinh thấy được khoảng cách trình bày trong định nghĩa là nhỏ nhất trong các khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc a tới mọi điểm của (α). Điều này được củng cố bằng hoạt động 3.

Trường hợp đường thẳng a không song song với (α) mà cắt (α) tại một điểm I nào đó thì ta nói rằng khoảng cách giữa a và (α) bằng 0.

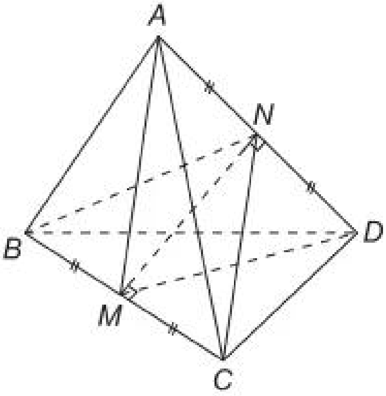
4. Để định nghĩa khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song ta dựa vào định nghĩa khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng. Giả sử ta có hai mặt phẳng song song với nhau là (α) và (β). Lấy một điểm M thuộc một trong hai mặt phẳng đó. Giả sử M thuộc (α), gọi M' là hình chiếu vuông góc của M trên (β). Khi đó độ dài đoạn MM' được gọi là khoảng cách từ (α) tới (β). Cần lưu ý tới hai tính chất sau :

a) Độ dài MM' này không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên (α). Mặt khác người ta cũng có thể lấy điểm M trên (β) rồi tìm M' trên (α).

b) Thực hiện *hoạt động 4* để chứng minh rằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) là nhỏ nhất trong các khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này tới một điểm bất kì của mặt phẳng kia.

5. Trước khi trình bày khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau chúng ta cần giới thiệu về đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.

Hoạt động 5 nhằm giới thiệu về đường vuông góc chung cụ thể trong một tứ diện đều $ABCD$. Ta có hai tam giác ABC và DCB bằng nhau. Do đó hai đường trung tuyến tương ứng cũng bằng nhau là $AM = DM$. Vậy AMD là tam giác cân tại M và suy ra $MN \perp AD$. Chứng minh tương tự ta có $MN \perp BC$. Thông qua hoạt động 5 này, ta giới thiệu MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC chéo nhau. (h.3.28)



Hình 3.28

Khái niệm hai đường thẳng chéo nhau, học sinh đã được biết đến khi học chương II. Trong chương III này trước khi xét vấn đề tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, SGK trình bày và giới thiệu về đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau trong không gian. Để giảng dạy tốt phần này, giáo viên cần tìm những thí dụ minh hoạ trong thực tế, trong lớp học, hoặc bằng giáo cụ trực quan về những hình ảnh minh hoạ cho đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau. Đây là một khái niệm tương đối khó, cần phải làm cho học sinh nắm vững định nghĩa đường thẳng d là đường vuông góc chung của đường thẳng chéo nhau a và b khi thoả mãn hai điều kiện :

+ d vuông góc với cả a và b ;

+ d phải cắt cả a và b.

Chú ý rằng sau khi trình bày định nghĩa về đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau, SGK giới thiệu luôn cách tìm đường vuông góc chung đó và bỏ qua việc trình bày định lí nêu lên sự tồn tại và sự xác định duy nhất của đường vuông góc chung đó.

6. Sau khi học sinh đã nắm vững định nghĩa đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì chúng ta có thể xác định được khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau đó. Cần lưu ý rằng bài toán xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thường khó hơn bài toán tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng đó. Nếu đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng a, b chéo nhau và cắt hai đường thẳng đó lần lượt tại M, N thì độ dài đoạn MN được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau đó.

Việc tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau cho trước được hiểu theo một trong các cách sau :

– Độ dài đoạn vuông góc chung MN của hai đường thẳng chéo nhau đó.

– Khoảng cách từ một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với đường thẳng nói trên và chứa đường thẳng còn lại.

– Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

Hoạt động 6 nhằm nhấn mạnh khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau là khoảng cách bé nhất so với khoảng cách giữa hai điểm bất kì nằm trên hai đường thẳng ấy.

C. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

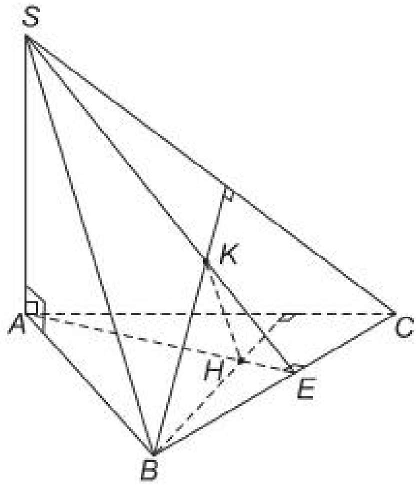
1. a) Sai ; b) Đúng ; c) Đúng ; d) Sai ; e) Sai.

2. a) Gọi $E = AH \cap BC$.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp AE \\ \text{và } BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp SE.$$

Ta suy ra ba đường thẳng AH, SK, BC đồng quy. (h.3.29)



Hình 3.29

b) $$\left.\begin{array}{l} BH \perp SA \\ BH \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$$

và $$\left.\begin{array}{l} BH \perp SC \\ BK \perp SC \end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp (BKH).$$

$$\left.\begin{array}{l} SC \perp (BKH) \Rightarrow SC \perp HK \\ BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp HK \end{array}\right\} \Rightarrow HK \perp (SBC).$$

c) Ta có $AE \perp SA$ và $AE \perp BC$. Vậy AE là đường vuông góc chung của SA và BC.

3. *Cách 1.* ABC' là tam giác vuông tại B có $AB = a$ và $BC' = a\sqrt{2}$. Độ dài đường cao BI là khoảng cách từ B tới đường thẳng AC'. Do đó :

$$\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2}.$$

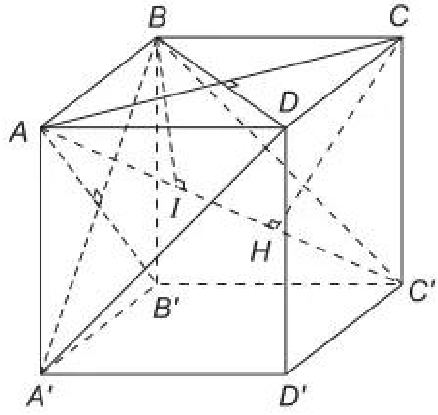
Ta tính được $BI = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau vì chúng đều là độ dài đường cao của các tam giác vuông bằng nhau (vì có hai cạnh góc vuông tương ứng bằng nhau). (h.3.30)

Cách 2.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}BD \perp AC\\ BD \perp AA'\end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC'\\ \text{Tương tự } \left.\begin{array}{l}A'B \perp AB'\\ A'B \perp AD\end{array}\right\} \Rightarrow A'B \perp (AB'C'D) \Rightarrow A'B \perp AC'\end{array}\right\} \Rightarrow AC' \perp (BDA').$$

Gọi I là giao điểm của đường thẳng AC' với mặt phẳng $(A'BD)$. Ta có $A'BD$ là một tam giác đều. Các tam giác vuông AIA', AIB, AID bằng nhau vì có một cạnh góc vuông và một cạnh huyền bằng nhau từng đôi một. Do đó ta có $A'I = BI = DI$ nghĩa là khoảng cách từ các điểm A', B, D đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Vậy I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều $A'BD$, do đó I cũng là trọng tâm và cũng là trực tâm của tam giác đều $A'BD$ có cạnh bằng $a\sqrt{2}$.



Hình 3.30

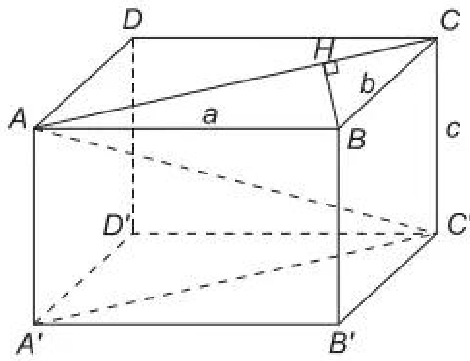
Ta suy ra $BI = \dfrac{2}{3} \cdot BD\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = A'I = DI$.

Tương tự, ta chứng minh được AC' vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đều $CB'D'$ tại trọng tâm H của tam giác đều đó. Ta có CH, $B'H$, $D'H$ đều vuông góc với AC' và $CH = B'H = D'H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

4. a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $BH \perp AC$ tại H thì $BH \perp (ACC'A')$. Khi đó BH là khoảng cách từ B tới mặt phẳng $(ACC'A')$. Xét tam giác vuông ABC ta có :

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}.$$

Do đó $BH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cdot$



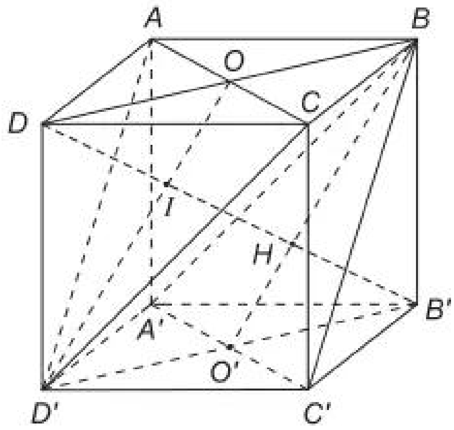
Hình 3.31

b) Mặt phẳng $(ACC'A')$ chứa AC' và song song với BB' nên khoảng cách giữa BB' và AC' chính là khoảng cách $BH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cdot$ (h.3.31)

Cách khác. Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ kẻ $B'I' \perp A'C'$ tại I'. Ta có $B'I'$ vuông góc với mặt phẳng $(ACC'A')$. Trong mặt phẳng $(ACC'A')$ vẽ $I'K \,//\, AA'$ cắt AC' tại K và tất nhiên $I'K$ cắt AC tại H. Từ K vẽ $KL \,//\, I'B'$ cắt BB' tại L thì KL là đường vuông góc chung của BB' và AC'.

Ta có $KL = B'I' = BH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cdot$

5. a) Ta chứng minh được $B'D$ vuông góc với các mặt phẳng (ACD') và $(BA'C')$ và cắt hai mặt phẳng này lần lượt tại trọng tâm I, H của hai tam giác ACD' và $BA'C'$. (h.3.32).



Hình 3.32

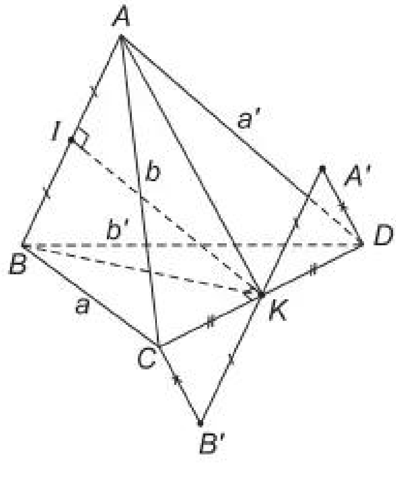
b) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(BA'C')$ và (ACD') bằng độ dài đoạn IH. Hai mặt phẳng song song $(BA'C')$ và (ACD') có giao tuyến với mặt phẳng $(BDD'B')$ lần lượt là BO' và $D'O$ song song với nhau trong đó O và O' lần lượt là tâm các hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Ta suy ra $IH = \dfrac{B'D}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot$

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BC' và CD' bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(BA'C')$ và (ACD') lần lượt chứa hai đường thẳng chéo nhau đó. Ta suy ra khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD' là $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot$

6. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của cạnh AB và CD. Qua K kẻ đường thẳng $d \parallel AB$, trên d lấy A', B' sao cho K là trung điểm của $A'B'$ và $KA' = IA$, chứng minh $B'C = A'D$.

Vì $BB' \parallel AA' \parallel IK$ mà IK là đường vuông góc chung của AB và CD nên $BB' \perp B'C$ và $AA' \perp A'D$. Hai tam giác vuông BCB' và ADA' có $BB' = AA'$ và $CB' = A'D$ nên ta suy ra $AD = BC$. (h.3.33)

Chứng minh tương tự ta có $AC = BD$.



Hình 3.33

Cách khác. Giả sử $BC = a$, $AD = a'$, $AC = b$, $BD = b'$. Cần chứng minh $a = a'$ và $b = b'$.

Vì AK là trung tuyến của tam giác ACD nên

$$AK^2 = \frac{a'^2 + b^2}{2} - \frac{CD^2}{4}. \qquad (1)$$

Tương tự BK là trung tuyến của tam giác BCD nên

$$BK^2 = \frac{a^2 + b'^2}{2} - \frac{CD^2}{4}. \qquad (2)$$

Vì IK là đường vuông góc chung của AB và CD nên điểm K cách đều A và B hay $AK = BK$.

Vì vậy từ (1) và (2) ta suy ra $a'^2 + b^2 = a^2 + b'^2$ (3)

Vì CI là trung tuyến của tam giác CAB nên

$$CI^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{AB^2}{4}. \qquad (4)$$

DI là trung tuyến của tam giác DAB nên

$$DI^2 = \frac{a'^2 + b'^2}{2} - \frac{AB^2}{4}. \qquad (5)$$

Vì I cách đều C và D nên $CI = DI$. Vì vậy từ (4) và (5) ta suy ra :

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2. \qquad (6)$$

Từ (3) và (6) ta suy ra a = a' và $b = b'$ nghĩa là $BC = AD$ và $AC = BD$.

7. Khoảng cách từ đỉnh S tới mặt đáy (ABC) bằng độ dài đường cao SH của hình chóp tam giác đều.

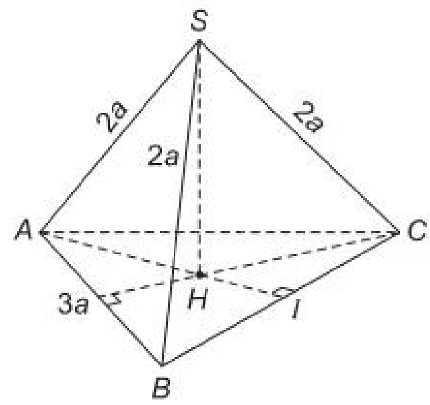
$SH^2 = SA^2 - AH^2.$

Gọi $I = AH \cap BC$ ta có

$AH = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$

Do đó $SH^2 = 4a^2 - 3a^2 = a^2.$

Vậy $SH = a$. (h.3.34)



Hình 3.34

8. Gọi I, K lần lượt là các trung điểm của các cạnh AB và CD. Ta có $IC = ID$ vì IC và ID là hai trung tuyến của hai tam giác đều bằng nhau.

Do đó $IK \perp CD$.

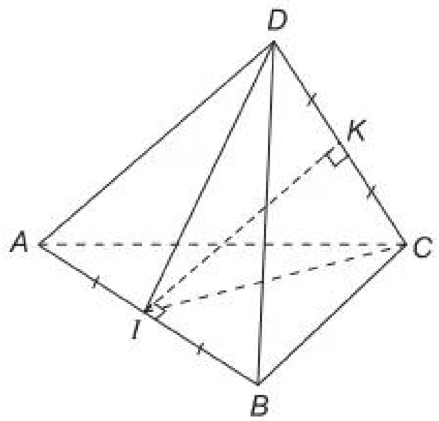
Chứng minh tương tự ta có $IK \perp AB$.

Vậy IK là đường vuông góc chung của hai cạnh đối diện của tứ diện đều là AB và CD. Ta có $IK \perp CD$ và $IK \perp AB$.

Xét tam giác vuông IKC ta có

$$IK^2 = IC^2 - KC^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4}.$$

Vậy $IK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (h.3.35)



Hình 3.35