HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. a) Đúng ; b) Đúng ; c) Sai ; d) Sai ; e) Sai.

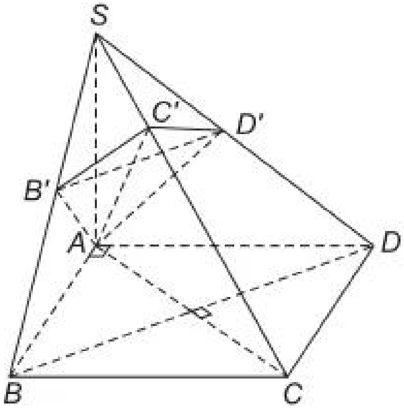
2. a) Đúng ; b) Sai ; c) Sai ; d) Sai.

3. a) Vì cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA \perp AD$ và $SA \perp AB$. Theo định lí ba đường vuông góc, vì $CD \perp AD$ nên $CD \perp SD$ và vì $BC \perp AB$

nên $BC \perp SB$. Vậy bốn mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông. (h.3.36)

b) $\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$

Mặt khác vì $(\alpha) \perp SC$ nên $B'D' \perp SC$. Hai đường thẳng BD và $B'D'$ cùng nằm trong mặt phẳng (SBD) và cùng vuông góc với SC. Vì SC không vuông góc với (SBD) nên hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SBD) sẽ vuông góc với BD và $B'D'$. Ta suy ra $BD // B'D'$.



Hình 3.36

Ta có $\left.\begin{matrix} BD \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB' \\ SC \perp (\alpha) \quad\; \Rightarrow SC \perp AB' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB.$

4. a) Vì BCD là tam giác đều nên $DE \perp BC$. Do đó $OF \perp BC$. Mặt khác vì $SO \perp (ABCD)$ nên $SO \perp BC$. Ta suy ra $BC \perp (SOF)$, do đó $(SBC) \perp (SOF)$. (h.3.37)

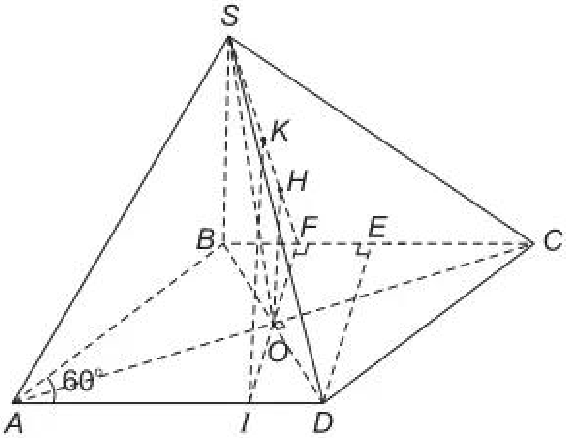
b) Trong mặt phẳng (SOF) dựng $OH \perp SF$ thì $OH \perp (SBC)$. Xét tam giác SOF vuông tại O ta có

$OF = \dfrac{DE}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ và có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OF^2} + \frac{1}{OS^2}$$

$$= \frac{16}{3a^2} + \frac{16}{9a^2} = \frac{64}{9a^2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{3a}{8}.$$



Hình 3.37

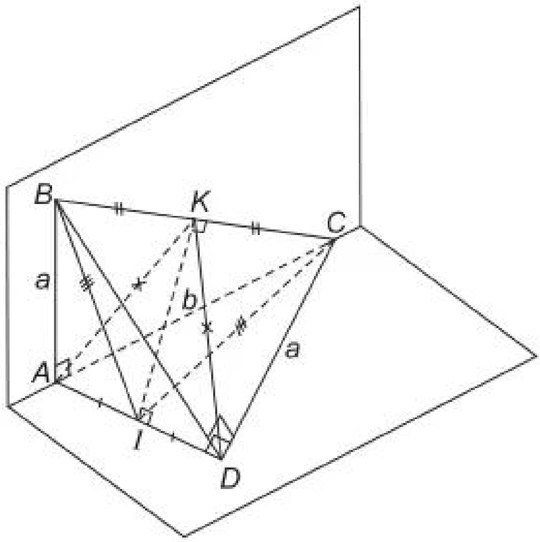
Do đó khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) là $OH = \dfrac{3a}{8}$.

Gọi $I = FO \cap AD$. Trong mặt phẳng (SIF) dựng $IK \perp SF$. Vì $AD \,//\, (SBC)$ nên khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) chính là khoảng cách từ I trên AD đến mặt phẳng (SBC). Đó chính là độ dài đoạn IK.

Ta có $IK = 2OH = \frac{3a}{4}\cdot$

5. a) Theo giả thiết $(ABC) \perp (ADC)$ và $BA \perp AC$ nên ta có $BA \perp (ADC)$. Do đó tam giác BAD vuông tại A.

Theo định lí ba đường vuông góc ta có $BA \perp (ACD)$, $AD \perp DC$ nên $BD \perp DC$ hay BDC là tam giác vuông tại D. (h.3.38)



Hình 3.38

b) Ta có $\left.\begin{array}{l} KA = \dfrac{BC}{2} \\ KD = \dfrac{BC}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow KA = KD$

Tam giác AKD cân tại K nên ta có $KI \perp AD$. (1)

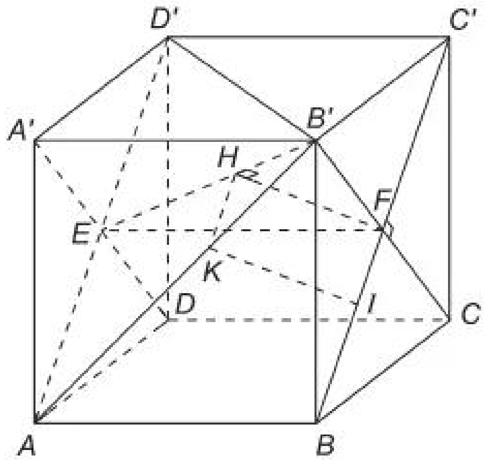
Mặt khác hai tam giác vuông ABD và DCA bằng nhau vì có AD chung và có $AB = DC = a$ nên ta suy ra $IB = IC$. Tam giác IBC cân tại I nên ta có $IK \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra IK là đoạn vuông góc chung của đường thẳng AD và BC.

6. a) Ta có $B'C \perp BC'$ và $A'B' \perp BC'$ vì $A'B' \perp (BB'C'C)$.

Do đó : $BC' \perp (A'B'CD)$ (h.3.39).

b) Mặt phẳng $(AB'D')$ chứa AB' và song song với BC'. Cần tìm hình chiếu của BC' trên mặt phẳng này.



Hình 3.39

Gọi E, F lần lượt là tâm các hình vuông $ADD'A'$ và $BCC'B'$. Trong mặt phẳng $(A'B'CD)$ kẻ $FH \perp EB'$ $(H \in EB')$ nên theo câu a, khi đó $FH \perp BC'$ hay $FH \perp AD'$. Vậy $FH \perp (AB'D')$. Do đó hình chiếu của BC' trên mặt phẳng $(AB'D')$ là đường thẳng đi qua H và song song với BC'. Đường thẳng đó cắt AB' tại K. Từ K ta vẽ KI song song với HF cắt BC' tại I. Ta có IK là đường vuông góc chung của AB' và BC'. Xét tam giác vuông EFB' ta có :

$$\frac{1}{FH^2} = \frac{1}{FE^2} + \frac{1}{FB'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{a^2}.$$

Ta tính được $KI = FH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Nhận xét : Khoảng cách KI giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(AB'D')$ và (BDC') lần lượt chứa hai đường thẳng chéo nhau đó. Khoảng cách này bằng $\frac{1}{3}$ độ dài đường chéo $A'C$.

7. a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Vì $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $HA = HB = HD$. Vậy H là trọng tâm của tam giác đều ABD.

Ta có $SH^2 = SA^2 - AH^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{3} = \frac{5a^2}{12}.$

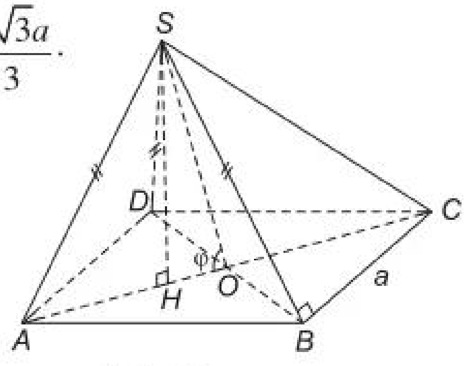
Vậy $SH = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$ (h.3.40)

Mặt khác $CH = CO + OH = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}.$

Xét tam giác vuông SHC ta có

$$SC^2 = SH^2 + HC^2 = \frac{5a^2}{12} + \frac{4a^2}{3} = \frac{7a^2}{4}.$$

Vậy $SC = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$



Hình 3.40

b) Ta có $H \in AC$, do đó $SH \subset (SAC)$. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $(SAC) \perp (ABCD)$.

c) Ta có $SB^2 + BC^2 = \dfrac{3a^2}{4} + a^2 = \dfrac{7a^2}{4} = SC^2$. Vậy tam giác SBC vuông tại B hay $SB \perp BC$.

d) Ta có $OH \perp BD$ và $OS \perp BD$ nên $\varphi = \widehat{SOH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Khi đó

$$\tan\varphi = \frac{SH}{HO} = \frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \frac{6}{a\sqrt{3}} = \sqrt{5}.$$

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

1.(C) ; 2.(D) ; 3.(A) ; 4.(B) ; 5.(D) ; 6.(C)
7.(D) ; 8.(A) ; 9.(D) ; 10.(A) ; 11.(B).