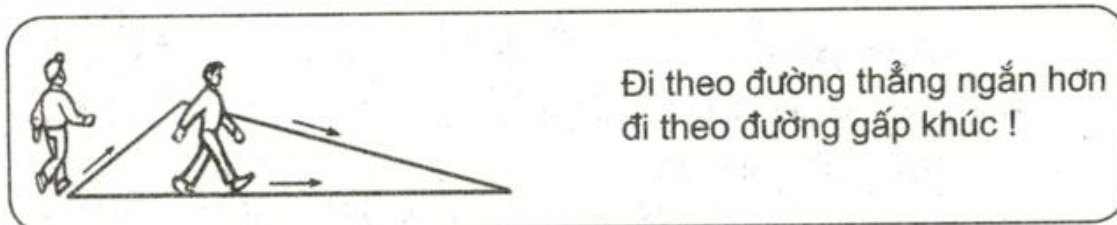


§3. Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác. Bất đẳng thức tam giác



Đi theo đường thẳng ngắn hơn
đi theo đường gấp khúc !

1. Bất đẳng thức tam giác

?1 Hãy thử vẽ tam giác với các cạnh có độ dài 1cm, 2cm, 4cm.

Em có vẽ được không ?

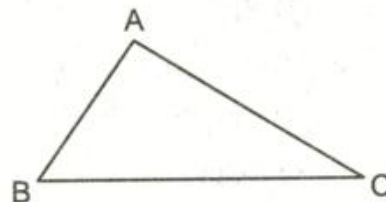
Không phải ba độ dài nào cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác. Ta có định lí sau :

Định lí

Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.

Cho tam giác ABC (h. 17), ta có các bất đẳng thức sau :

- $AB + AC > BC$
- $AB + BC > AC$
- $AC + BC > AB$.



Hình 17

?2 Dựa vào hình 17, hãy viết giả thiết, kết luận của định lí.

Chứng minh :

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đầu tiên, hai bất đẳng thức còn lại được chứng minh tương tự.

Trên tia đối của tia AB, lấy điểm D sao cho $AD = AC$ (h. 18). Trong tam giác BCD, ta sẽ so sánh BD với BC.

Do tia CA nằm giữa hai tia CB và CD nên

$$\widehat{BCD} > \widehat{ACD}. \quad (1)$$

Mặt khác, theo cách dựng, tam giác ACD cân tại A nên

$$\widehat{ACD} = \widehat{ADC} = \widehat{BDC}. \quad (2)$$

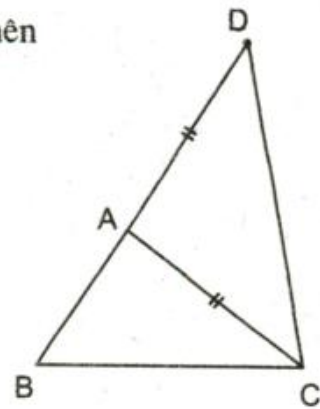
Từ (1) và (2) suy ra :

$$\widehat{BCD} > \widehat{BDC}. \quad (3)$$

Trong tam giác BCD, từ (3) suy ra :

$$AB + AC = BD > BC$$

(theo định lí về quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác).



Hình 18

Các bất đẳng thức trong kết luận của định lí được gọi là các *bất đẳng thức tam giác*.

2. Hệ quả của bất đẳng thức tam giác

Từ các bất đẳng thức tam giác, ta suy ra :

$$AB > AC - BC ; \quad AC > AB - BC ; \quad BC > AB - AC ;$$

$$AB > BC - AC ; \quad AC > BC - AB ; \quad BC > AC - AB.$$

Như vậy, từ định lí trên ta có hệ quả sau :

Hệ quả

Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.

Nhận xét :

Nếu xét đồng thời cả tổng và hiệu độ dài hai cạnh của một tam giác thì quan hệ giữa các cạnh của nó còn được phát biểu như sau :

Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.

Chẳng hạn, trong tam giác ABC, với cạnh BC ta có :

$$AB - AC < BC < AB + AC.$$

?3 Em hãy giải thích vì sao không có tam giác với ba cạnh có độ dài 1cm, 2cm, 4cm (xem **?**1).

Lưu ý : Khi xét độ dài ba đoạn thẳng có thoả mãn bất đẳng thức tam giác hay không, ta chỉ cần so sánh độ dài lớn nhất với tổng hai độ dài còn lại, hoặc so sánh độ dài nhỏ nhất với hiệu hai độ dài còn lại.

Bài tập

15. Dựa vào bất đẳng thức tam giác, kiểm tra xem bộ ba nào trong các bộ ba đoạn thẳng có độ dài cho sau đây không thể là ba cạnh của một tam giác. Trong những trường hợp còn lại, hãy thử dựng tam giác có độ dài ba cạnh như thế :
- a) 2cm ; 3cm ; 6cm.
 - b) 2cm ; 4cm ; 6cm.
 - c) 3cm ; 4cm ; 6cm.
16. Cho tam giác ABC với hai cạnh $BC = 1\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$.
Hãy tìm độ dài cạnh AB, biết rằng độ dài này là một số nguyên (cm). Tam giác ABC là tam giác gì ?
17. Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi I là giao điểm của đường thẳng BM và cạnh AC.
- a) So sánh MA với $MI + IA$, từ đó chứng minh $MA + MB < IB + IA$.
 - b) So sánh IB với $IC + CB$, từ đó chứng minh $IB + IA < CA + CB$.
 - c) Chứng minh bất đẳng thức $MA + MB < CA + CB$.

Luyện tập

18. Cho các bộ ba đoạn thẳng có độ dài như sau :
- a) 2cm ; 3cm ; 4cm
 - b) 1cm ; 2cm ; 3,5cm
 - c) 2,2cm ; 2cm ; 4,2cm.
- Hãy vẽ các tam giác có độ dài ba cạnh lần lượt là một trong các bộ ba ở trên (nếu vẽ được). Trong trường hợp không vẽ được, hãy giải thích.
19. Tìm chu vi của một tam giác cân biết độ dài hai cạnh của nó là 3,9cm và 7,9cm.

20. Một cách chứng minh khác của bất đẳng thức tam giác :

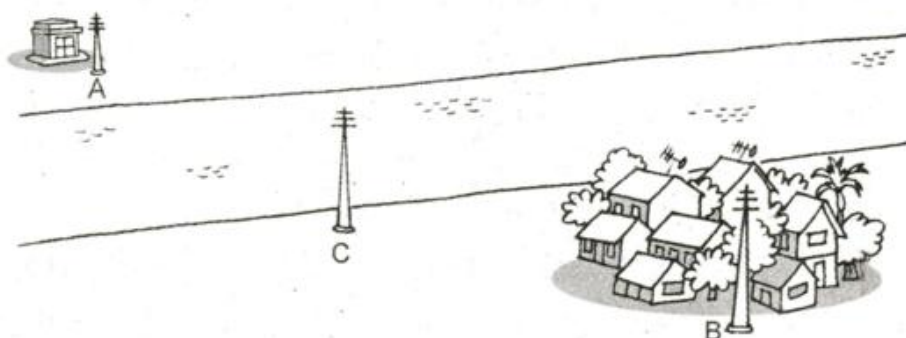
Cho tam giác ABC. Giả sử BC là cạnh lớn nhất. Kẻ đường vuông góc AH đến đường thẳng BC ($H \in BC$).

a) Dùng nhận xét về cạnh lớn nhất trong tam giác vuông ở §1 để chứng minh $AB + AC > BC$.

b) Từ giả thiết về cạnh BC, hãy suy ra hai bất đẳng thức tam giác còn lại.

21. Một trạm biến áp và một khu dân cư được xây dựng cách xa hai bờ sông tại hai địa điểm A và B (h. 19).

Hãy tìm trên bờ sông gần khu dân cư một địa điểm C để dựng một cột mốc dây đưa điện từ trạm biến áp về cho khu dân cư sao cho độ dài đường dây dẫn là ngắn nhất.

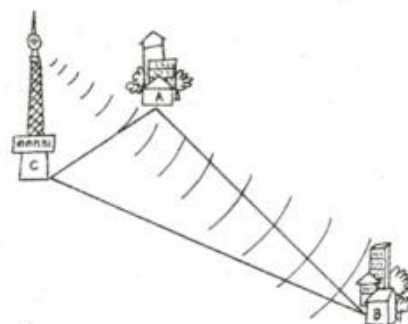


Hình 19

22. Ba thành phố A, B, C là ba đỉnh của một tam giác ; biết rằng : $AC = 30\text{km}$, $AB = 90\text{km}$ (h. 20).

a) Nếu đặt ở C máy phát sóng truyền thanh có bán kính hoạt động bằng 60km thì thành phố B có nhận được tín hiệu không ? Vì sao ?

b) Cũng câu hỏi như vậy với máy phát sóng có bán kính hoạt động bằng 120km ?



Hình 20