§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

I. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1. Mặt phẳng

Mặt bảng, mặt bàn, mặt nước hồ yên lặng cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn (h.2.2).

a) b) c)

Hình 2.2

• Để biểu diễn mặt phẳng ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn (h.2.3).

Hình 2.3

• Để kí hiệu mặt phẳng, ta thường dùng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hi Lạp đặt trong dấu ngoặc ( ). Ví dụ : mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q), mặt phẳng (α), mặt phẳng (β) hoặc viết tắt là mp(P), mp(Q), mp(α), mp(β) hoặc (P), (Q), (α), (β)...

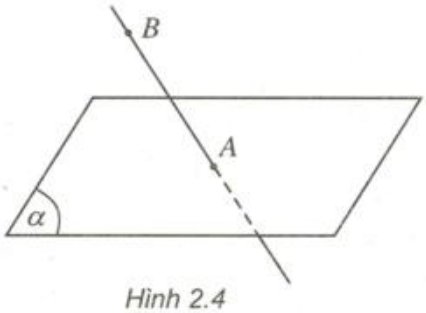
2. Điểm thuộc mặt phẳng

Cho điểm A và mặt phẳng (α).

Khi điểm A *thuộc mặt phẳng* (α) ta nói A *nằm trên* (α) hay (α) *chứa* A, hay (α) *đi qua* A và kí hiệu là $A \in (\alpha)$.

Khi điểm *A không thuộc mặt phẳng* (α) ta nói điểm *A nằm ngoài* (α) hay (α) *không chứa A* và kí hiệu là $A \notin (\alpha)$.

Hình 2.4 cho ta hình biểu diễn của điểm *A* thuộc mặt phẳng (α), còn điểm *B* không thuộc (α).

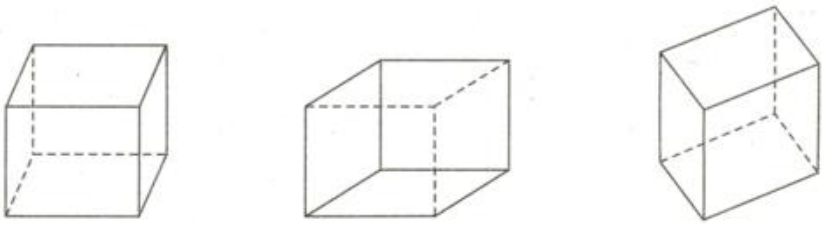


Hình 2.4

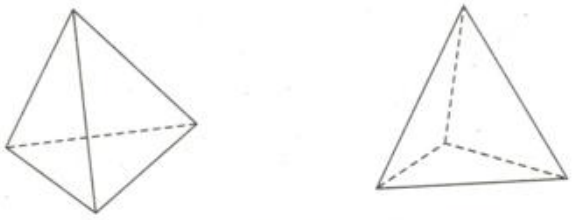
3. Hình biểu diễn của một hình không gian

Để nghiên cứu hình học không gian người ta thường vẽ các hình không gian lên bảng, lên giấy. Ta gọi hình vẽ đó là hình biểu diễn của một hình không gian.

– Ta có một vài hình biểu diễn của hình lập phương như trong hình 2.5.


Hình 2.5

– Hình 2.6 là một vài hình biểu diễn của hình chóp tam giác.


Hình 2.6

△1 Hãy vẽ thêm một vài hình biểu diễn của hình chóp tam giác.

Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian người ta dựa vào những quy tắc sau đây.

– Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
– Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.
– Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.
– Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy và nét đứt đoạn biểu diễn cho đường bị che khuất.

Các quy tắc khác sẽ được học ở phần sau.

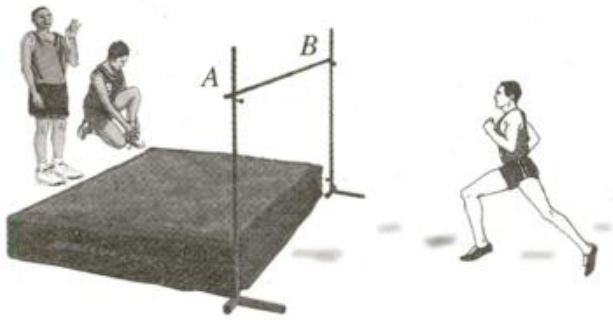
II. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN

Để nghiên cứu hình học không gian, từ quan sát thực tiễn và kinh nghiệm người ta thừa nhận một số tính chất sau.

Tính chất 1

Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

Hình 2.7 cho thấy qua hai điểm A, B có duy nhất một đường thẳng.

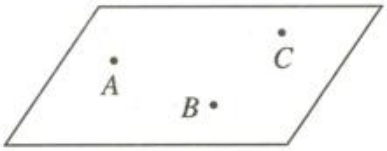


Hình 2.7

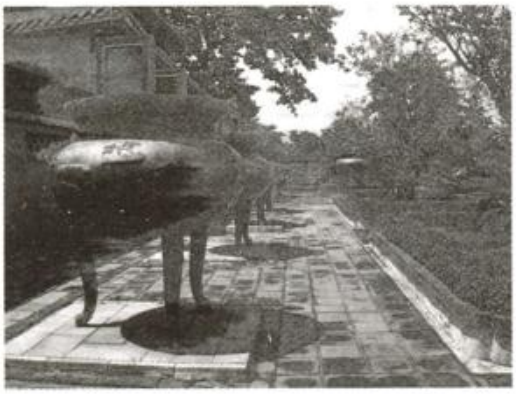
Tính chất 2

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

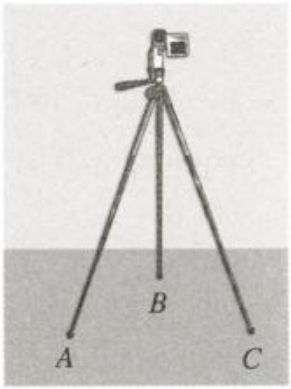
Như vậy một mặt phẳng hoàn toàn xác định nếu biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng. Ta kí hiệu mặt phẳng qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C là *mặt phẳng* (ABC) hoặc mp (ABC) hoặc (ABC) (h.2.8).



Hình 2.8



Hình 2.9. Cửu Đỉnh ở Hoàng Thành, Huế



Hình 2.10

Quan sát một máy chụp hình đặt trên một giá có ba chân. Khi đặt nó lên bất kì địa hình nào nó cũng không bị gập ghềnh vì ba điểm A, B, C (h.2.10) luôn nằm trên một mặt phẳng.

Tính chất 3

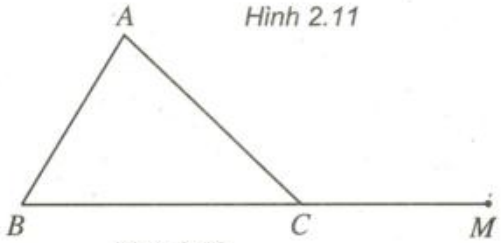
Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

△2 Tại sao người thợ mộc kiểm tra độ phẳng mặt bàn bằng cách rê thước thẳng trên mặt bàn ? (h.2.11).

Hình 2.11

Nếu mọi điểm của đường thẳng d đều thuộc mặt phẳng (α) thì ta nói đường thẳng d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu là $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.

△3 Cho tam giác ABC, M là điểm thuộc phần kéo dài của đoạn BC (h.2.12). Hãy cho biết M có thuộc mặt phẳng (ABC) không và đường thẳng AM có nằm trong mặt phẳng (ABC) không ?



Hình 2.12

Tính chất 4

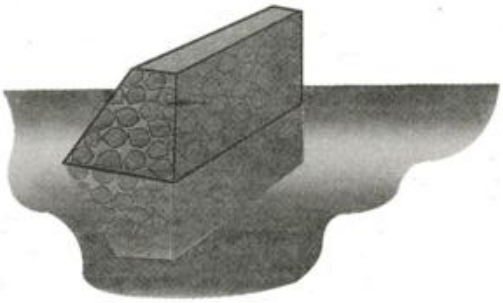
Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó *đồng phẳng*, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói rằng chúng *không đồng phẳng*.

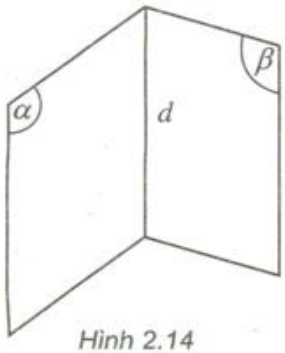
Tính chất 5

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Từ đó suy ra : *Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy.*



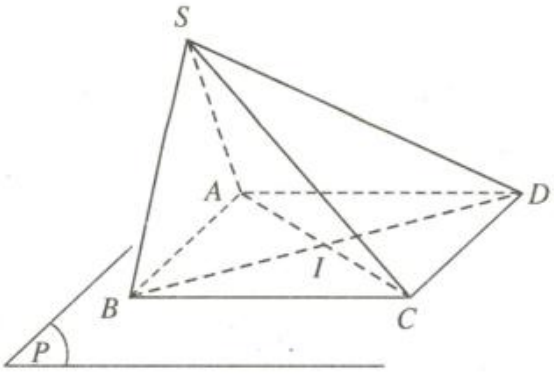
Hình 2.13. Mặt nước và thành đập giao nhau theo đường thẳng.



Hình 2.14

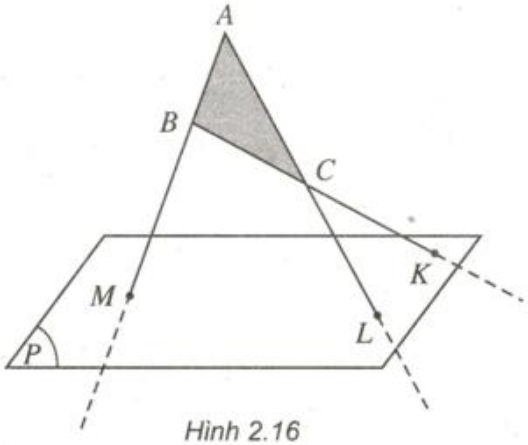
Đường thẳng chung d của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) được gọi là *giao tuyến* của (α) và (β) và kí hiệu là $d = (\alpha) \cap (\beta)$ (h.2.14).

4 Trong mặt phẳng (P), cho hình bình hành $ABCD$. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P). Hãy chỉ ra một điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) khác điểm S (h.2.15).



Hình 2.15

5 Hình 2.16 đúng hay sai ? Tại sao ?



Hình 2.16

Tính chất 6

Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

III. CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẲNG

1. Ba cách xác định mặt phẳng

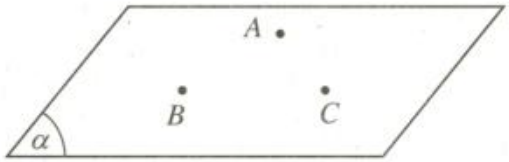
Dựa vào các tính chất được thừa nhận trên, ta có ba cách xác định một mặt phẳng sau đây.

a) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.

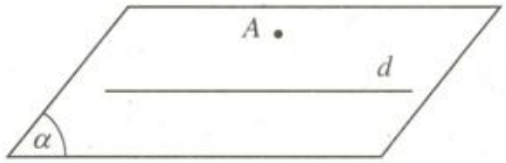
Ba điểm A, B, C không thẳng hàng xác định một mặt phẳng (h.2.17).

b) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

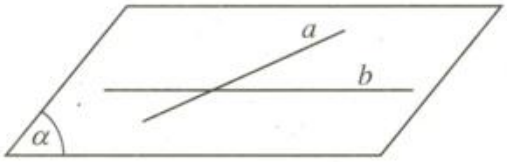
Cho đường thẳng d và điểm A không thuộc d. Khi đó điểm A và đường thẳng d xác định một mặt phẳng, kí hiệu là mp (A, d) hay (A, d), hoặc mp (d, A) hay (d, A) (h.2.18).



Hình 2.17



Hình 2.18



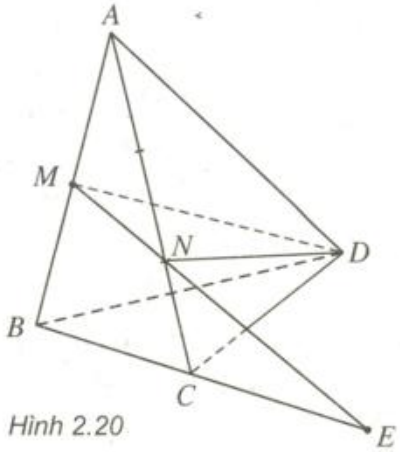
Hình 2.19

c) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Cho hai đường thẳng cắt nhau a và b. Khi đó hai đường thẳng a và b xác định một mặt phẳng và kí hiệu là mp (a, b) hay (a, b), hoặc mp (b, a) hay (b, a) (h.2.19).

2. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Trên hai đoạn AB và AC lấy hai điểm M và N sao cho $\frac{AM}{BM} = 1$ và $\frac{AN}{NC} = 2$. Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng (DMN) với các mặt phẳng (ABD), (ACD), (ABC), (BCD) (h.2.20).



Hình 2.20

Giải

Điểm D và điểm M cùng thuộc hai mặt phẳng (DMN) và (ABD) nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng DM.

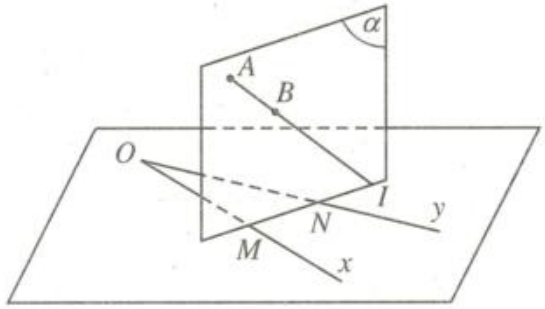
Tương tự ta có $(DMN) \cap (ACD) = DN$, $(DMN) \cap (ABC) = MN$.

Trong mặt phẳng (ABC), vì $\frac{AM}{MB} \neq \frac{AN}{NC}$ nên đường thẳng MN và BC cắt nhau tại một điểm, gọi điểm đó là E. Vì D, E cùng thuộc hai mặt phẳng (DMN) và (BCD) nên $(DMN) \cap (BCD) = DE$.

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng cắt nhau Ox, Oy và hai điểm A, B không nằm trong mặt phẳng (Ox, Oy). Biết rằng đường thẳng AB và mặt phẳng (Ox, Oy) có điểm chung. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn luôn chứa AB và cắt Ox, Oy lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định khi (α) thay đổi.

Giải

Gọi I là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (Ox, Oy) (h.2.21). Vì AB và mặt phẳng (Ox, Oy) cố định nên I cố định. Vì M, N, I là các điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (Ox, Oy) nên chúng luôn luôn thẳng hàng. Vậy đường thẳng MN luôn luôn đi qua I cố định khi (α) thay đổi.



Hình 2.21

Nhận xét. Để chứng minh ba điểm thẳng hàng ta có thể chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt.

Ví dụ 3. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Trên ba cạnh AB, AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N và K sao cho đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại H, đường thẳng NK cắt đường thẳng CD tại I, đường thẳng KM cắt đường thẳng BD tại J. Chứng minh ba điểm H, I, J thẳng hàng.

Giải

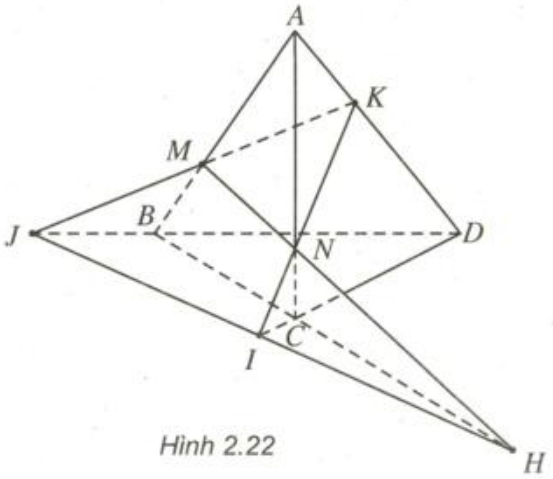
Ta có J là điểm chung của hai mặt phẳng (MNK) và (BCD) (h.2.22).

Thật vậy, ta có $\begin{cases} J \in MK \\ MK \subset (MNK) \end{cases} \Rightarrow J \in (MNK)$

và $\begin{cases} J \in BD \\ BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow J \in (BCD)$.

Lí luận tương tự ta có I, H cũng là điểm chung của hai mặt phẳng (MNK) và (BCD).

Vậy I, J, H nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (MNK) và (BCD) nên I, J, H thẳng hàng.

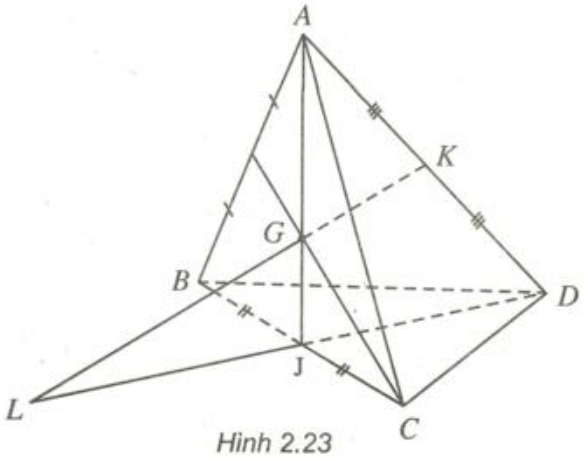


Hình 2.22

Ví dụ 4. Cho tam giác BCD và điểm A không thuộc mặt phẳng (BCD). Gọi K là trung điểm của đoạn AD và G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm giao điểm của đường thẳng GK và mặt phẳng (BCD).

Giải

Gọi J là giao điểm của AG và BC. Trong mặt phẳng (AJD), $\frac{AG}{AJ} = \frac{2}{3}$; $\frac{AK}{AD} = \frac{1}{2}$ nên GK và JD cắt nhau (h.2.23). Gọi L là giao điểm của GK và JD.



Hình 2.23

Ta có $\begin{cases} L \in JD \\ JD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow L \in (BCD)$.

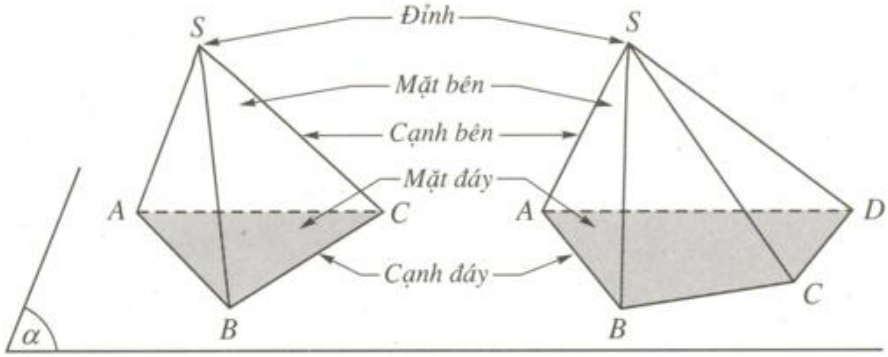
Vậy L là giao điểm của GK và (BCD).

Nhận xét. Để tìm giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng ta có thể đưa về việc tìm giao điểm của đường thẳng đó với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng đã cho.

IV. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

1. Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài (α). Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ ta được n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1. Hình gồm đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 gọi là *hình chóp*, kí hiệu là $S.A_1A_2 \dots A_n$. Ta gọi S là *đỉnh* và đa giác

$A_1A_2 \ldots A_n$ là *mặt đáy*. Các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 được gọi là các *mặt bên* ; các đoạn SA_1, SA_2, ..., SA_n là các *cạnh bên* ; các cạnh của đa giác đáy gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp. Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... lần lượt là *hình chóp tam giác*, *hình chóp tứ giác*, *hình chóp ngũ giác*, ... (h.2.24).



Hình 2.24

2. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là *hình tứ diện* (hay ngắn gọn là *tứ diện*) và được kí hiệu là $ABCD$. Các điểm A, B, C, D gọi là các *đỉnh* của tứ diện. Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các *cạnh* của tứ diện. Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là hai *cạnh đối diện*. Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các *mặt* của tứ diện. Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là *đỉnh đối diện* với mặt đó.

Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều gọi là *hình tứ diện đều*.

☞ ***Chú ý.*** Khi nói đến tam giác ta có thể hiểu là tập hợp các điểm thuộc các cạnh hoặc cũng có thể hiểu là tập hợp các điểm thuộc các cạnh và các điểm trong của tam giác đó. Tương tự có thể hiểu như vậy đối với đa giác.

△ 6 Kể tên các mặt bên, cạnh bên, cạnh đáy của hình chóp ở hình 2.24.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD, SC. Tìm giao điểm của mặt phẳng (MNP) với các cạnh của hình chóp và giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt của hình chóp.

Giải

Đường thẳng MN cắt đường thẳng BC, CD lần lượt tại K, L.

Gọi E là giao điểm của PK và SB, F là giao điểm của PL và SD (h.2.25).

Ta có giao điểm của (MNP) với các cạnh SB, SC, SD lần lượt là E, P, F.

Từ đó suy ra

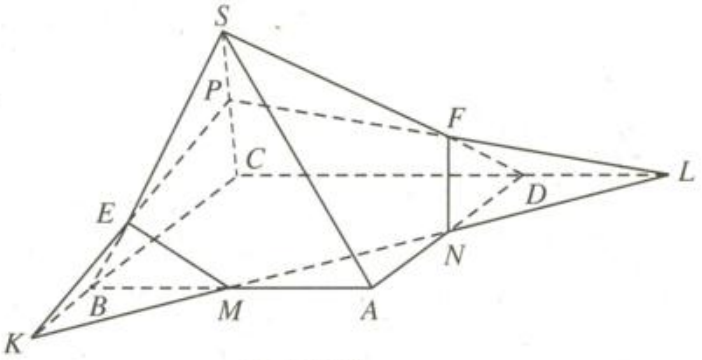
$(MNP) \cap (ABCD) = MN$,

$(MNP) \cap (SAB) = EM$,

$(MNP) \cap (SBC) = EP$,

$(MNP) \cap (SCD) = PF$

và $(MNP) \cap (SDA) = FN$.



Hình 2.25

☞ ***Chú ý.*** Đa giác $MEPFN$ có cạnh nằm trên giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$. Ta gọi đa giác $MEPFN$ là *thiết diện* (hay *mặt cắt*) của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Nói một cách đơn giản : *Thiết diện* (hay *mặt cắt*) của hình $\mathscr{H}$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) là phần chung của $\mathscr{H}$ và (α).

BÀI TẬP

1. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD. Lấy E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC.

a) Chứng minh đường thẳng EF nằm trong mặt phẳng (ABC).

b) Khi EF và BC cắt nhau tại I, chứng minh I là điểm chung của hai mặt phẳng (BCD) và (DEF).

2. Gọi M là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α). Chứng minh M là điểm chung của (α) với một mặt phẳng bất kì chứa d.

3. Cho ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 không cùng nằm trong một mặt phẳng và cắt nhau từng đôi một. Chứng minh ba đường thẳng trên đồng quy.

4. Cho bốn điểm A, B, C và D không đồng phẳng. Gọi G_A, G_B, G_C, G_D lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, ABD, ABC. Chứng minh rằng AG_A, BG_B, CG_C, DG_D đồng quy.

5. Cho tứ giác $ABCD$ nằm trong mặt phẳng (α) có hai cạnh AB và CD không song song. Gọi S là điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) và M là trung điểm đoạn SC.

a) Tìm giao điểm N của đường thẳng SD và mặt phẳng (MAB).

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

6. Cho bốn điểm A, B, C và D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD).

7. Cho bốn điểm A, B, C và D không đồng phẳng. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD).

b) Gọi M và N là hai điểm lần lượt lấy trên hai đoạn thẳng AB và AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).

8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD, trên cạnh AD lấy điểm P không trùng với trung điểm của AD.

a) Gọi E là giao điểm của đường thẳng MP và đường thẳng BD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (PMN) và (BCD).

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (PMN) và BC.

9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Trong mặt phẳng đáy vẽ đường thẳng d đi qua A và không song song với các cạnh của hình bình hành, d cắt đoạn BC tại E. Gọi C' là một điểm nằm trên cạnh SC.

a) Tìm giao điểm M của CD và mặt phẳng $(C'AE)$.

b) Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng $(C'AE)$.

10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB và CD không song song. Gọi M là một điểm thuộc miền trong của tam giác SCD.

a) Tìm giao điểm N của đường thẳng CD và mặt phẳng (SBM).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).

c) Tìm giao điểm I của đường thẳng BM và mặt phẳng (SAC).

d) Tìm giao điểm P của SC và mặt phẳng (ABM), từ đó suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (ABM).