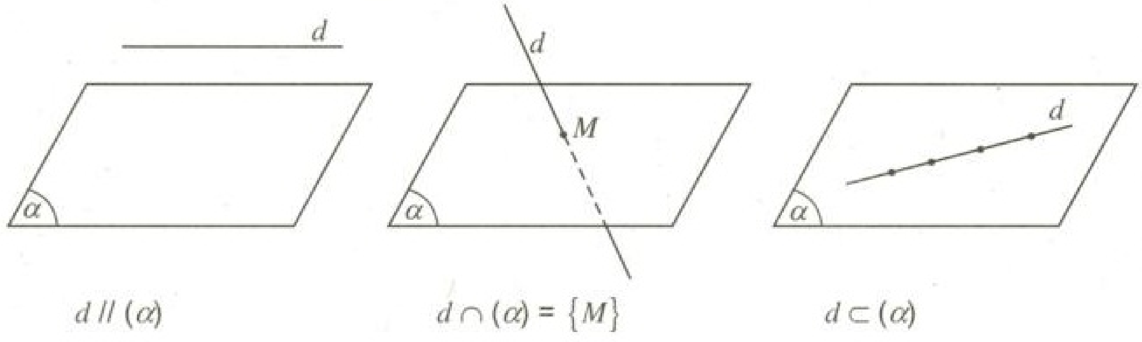
§3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Tuỳ theo số điểm chung của d và (α), ta có ba trường hợp sau (h.2.39).



Hình 2.39

• *d và (α) không có điểm chung*. Khi đó ta nói *d song song* với (α) hay (α) *song song* với d và kí hiệu là $d \mathbin{/\!/} (\alpha)$ hay $(\alpha) \mathbin{/\!/} d$.

• *d và (α) có một điểm chung duy nhất M*. Khi đó ta nói d và (α) *cắt nhau* tại điểm M và kí hiệu là $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.

• *d và (α) có từ hai điểm chung trở lên*. Khi đó, theo tính chất 3 §1, d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.

1 Trong phòng học hãy quan sát hình ảnh của đường thẳng song song với mặt phẳng.

II. TÍNH CHẤT

Để nhận biết đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) ta có thể căn cứ vào số giao điểm của chúng. Ngoài ra ta có thể dựa vào các dấu hiệu sau đây.

Định lí 1

Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α).

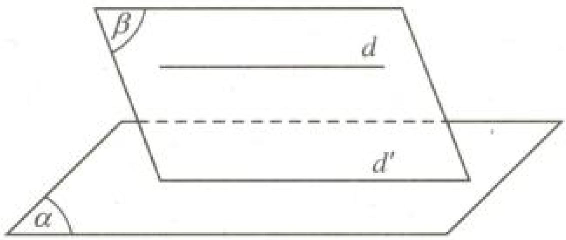
Chứng minh

Gọi (β) là mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng song song d, d'.

Ta có $(\alpha) \cap (\beta) = d'$ (h.2.40).

Nếu $d \cap (\alpha) = \{M\}$ thì M thuộc giao tuyến của (α) và (β) là d' hay $d \cap d' = \{M\}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $d \parallel d'$.

Vậy $d \parallel (\alpha)$.

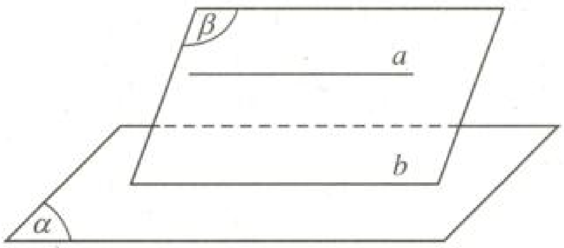


Hình 2.40

△2 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD. Các đường thẳng MN, NP, PM có song song với mặt phẳng (BCD) không ?

Định lí 2

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a (h.2.41).



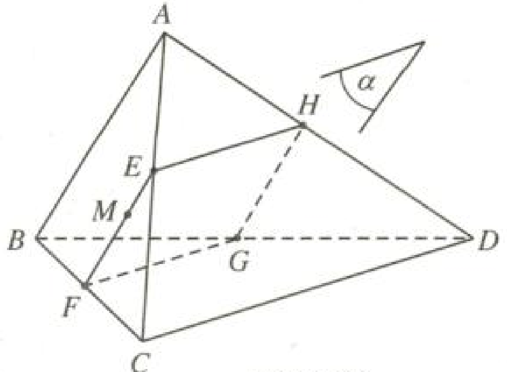
Hình 2.41

Ví dụ. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M là điểm thuộc miền trong của tam giác ABC. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với các đường thẳng AB và CD. Xác định thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện $ABCD$. Thiết diện đó là hình gì ?

Giải

Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với AB nên (α) cắt mặt phẳng (ABC) (chứa AB) theo giao tuyến d đi qua M và song song với AB. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của d với AC và BC (h.2.42).

Mặt khác, (α) song song với CD nên (α) cắt (ACD) và (BCD) (là các mặt phẳng chứa CD) theo các giao tuyến EH và FG cùng song song với CD ($H \in AD$ và $G \in BD$).



Hình 2.42

Ta có thiết diện là tứ giác $EFGH$. Hơn nữa ta có

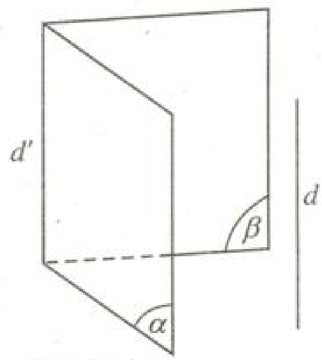
$(\alpha) \,//\, AB$ và $(ABD) \cap (\alpha) = HG$, từ đó suy ra $HG \,//\, AB$.

Tứ giác $EFGH$ có $EF \,//\, HG$ ($// \, AB$) và $EH \,//\, FG$ ($// \, CD$) nên nó là hình bình hành.

Từ định lí 2 ta suy ra hệ quả sau.

Hệ quả

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó (h.2.43).



Hình 2.43

Hai đường thẳng chéo nhau thì không thể cùng nằm trong một mặt phẳng. Tuy nhiên, ta có thể tìm được mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia. Định lí sau đây thể hiện tính chất đó.

Định lí 3

Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

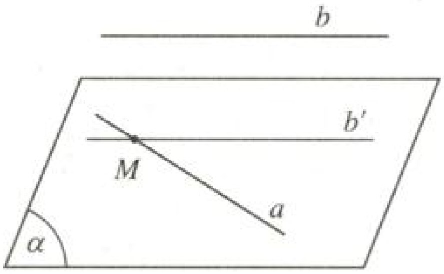
Chứng minh

Giả sử ta có hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Lấy điểm M bất kì thuộc a. Qua M kẻ đường thẳng b' song song với b. Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi a và b' (h.2.44).

Ta có : $b \parallel b'$ và $b' \subset (\alpha)$, từ đó suy ra $b \parallel (\alpha)$.

Hơn nữa $(\alpha) \supset a$ nên (α) là mặt phẳng cần tìm.



Hình 2.44

Ta chứng minh (α) là duy nhất. Thật vậy, nếu có một mặt phẳng (β) khác (α), chứa a và song song với b thì khi đó (α), (β) là hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với b nên giao tuyến của chúng là a, phải song song với b. Điều này mâu thuẫn với giả thiết a và b chéo nhau.

Tương tự ta có thể chứng minh có duy nhất một mặt phẳng chứa b và song song với a.

BÀI TẬP

1. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Gọi O và O' lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$. Chứng minh rằng đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABD và ABE. Chứng minh đường thẳng MN song song với mặt phẳng (CEF).

2. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AB lấy một điểm M. Cho (α) là mặt phẳng qua M, song song với hai đường thẳng AC và BD.

a) Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện.

b) Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì ?

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua O, song song với AB và SC. Thiết diện đó là hình gì ?