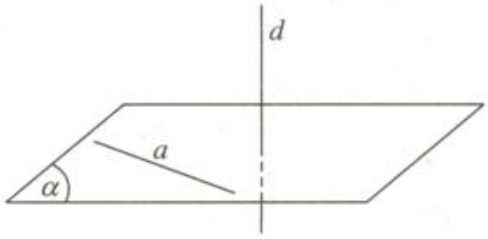
§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Trong thực tế, hình ảnh của sợi dây dọi vuông góc với nền nhà cho ta khái niệm về sự vuông góc của đường thẳng với mặt phẳng.

I. ĐỊNH NGHĨA

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) (h.3.17).



Hình 3.17

Khi d vuông góc với (α) ta còn nói (α) vuông góc với d, hoặc d và (α) vuông góc với nhau và kí hiệu là $d \perp (\alpha)$.

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Định lí

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

Chứng minh

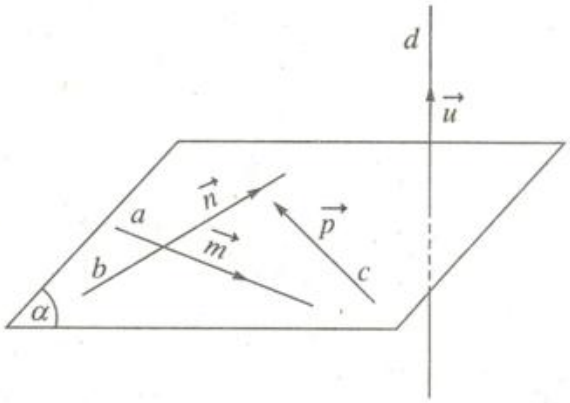
Giả sử hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng (α) là a, b lần lượt có các vectơ chỉ phương là $\vec{m}$, $\vec{n}$ (h.3.18). Tất nhiên khi đó $\vec{m}$ và $\vec{n}$ là hai vectơ không cùng phương. Gọi c là một đường thẳng bất kì nằm trong mặt phẳng (α) và có vectơ chỉ phương $\vec{p}$. Vì ba vectơ $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ đồng phẳng và $\vec{m}$, $\vec{n}$ là hai vectơ không cùng phương nên ta có hai số x và y sao cho $\vec{p} = x\vec{m} + y\vec{n}$.

Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d. Vì $d \perp a$ và $d \perp b$ nên ta có $\vec{u}.\vec{m} = 0$ và $\vec{u}.\vec{n} = 0$.

Khi đó

$$\vec{u}.\vec{p} = \vec{u}.(x\vec{m} + y\vec{n}) = x.\vec{u}.\vec{m} + y.\vec{u}.\vec{n} = 0.$$

Vậy đường thẳng d vuông góc với đường thẳng c bất kì nằm trong mặt phẳng (α) nghĩa là đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α).



Hình 3.18

Hệ quả

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba của tam giác đó.

△1 Muốn chứng minh đường thẳng d vuông góc với một mặt phẳng (α), người ta phải làm như thế nào ?

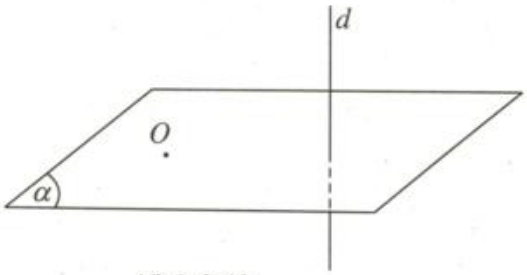
△2 Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng d vuông góc với a và b. Khi đó đường thẳng d có vuông góc với mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng song song a và b không ?

III. TÍNH CHẤT

Từ định nghĩa và điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ta có các tính chất sau :

Tính chất 1

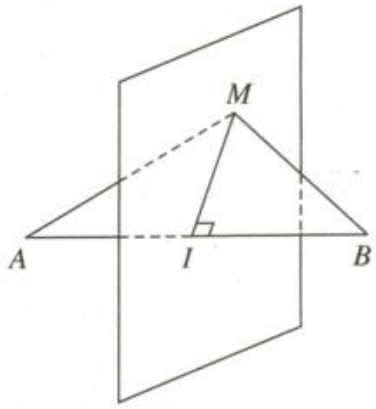
Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước (h.3.19).



Hình 3.19

Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng

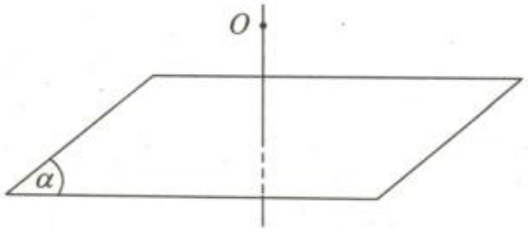
Người ta gọi mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB là *mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB* (h.3.20).



Hình 3.20

Tính chất 2

Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước (h.3.21).



Hình 3.21

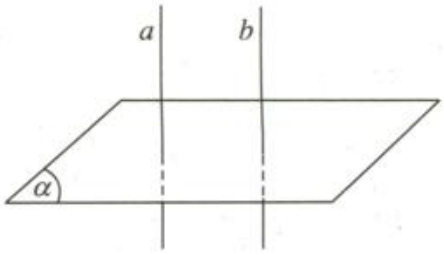
IV. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Người ta có thể chứng minh được một số tính chất sau đây về sự liên quan giữa quan hệ vuông góc và quan hệ song song của đường thẳng và mặt phẳng.

Tính chất 1

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia (h.3.22).

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

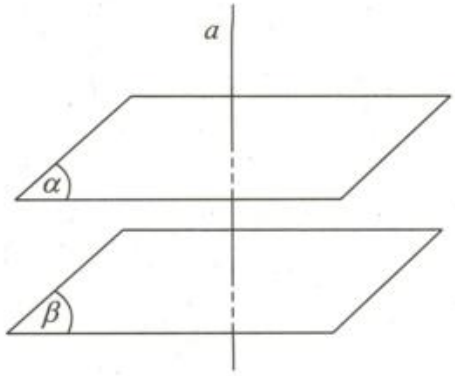


Hình 3.22

Tính chất 2

a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia (h.3.23).

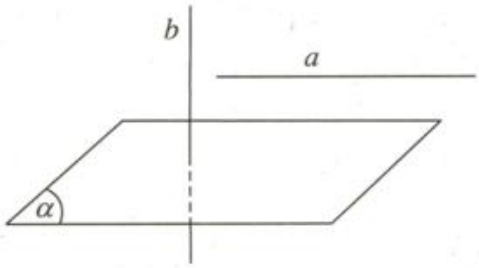
b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau (h.3.23).



Hình 3.23

Tính chất 3

a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a (h.3.24).



Hình 3.24

b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau (h.3.24).

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác SAB. Chứng minh $AH \perp SC$.

Giải

a) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$ (h.3.25).

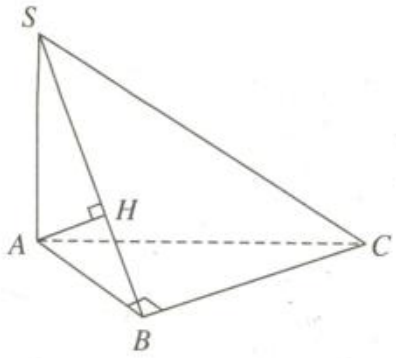
Ta có $BC \perp SA$, $BC \perp AB$.

Từ đó suy ra $BC \perp (SAB)$.

b) Vì $BC \perp (SAB)$ và AH nằm trong (SAB) nên $BC \perp AH$. Ta lại có

$AH \perp BC$, $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC)$.

Từ đó suy ra $AH \perp SC$.

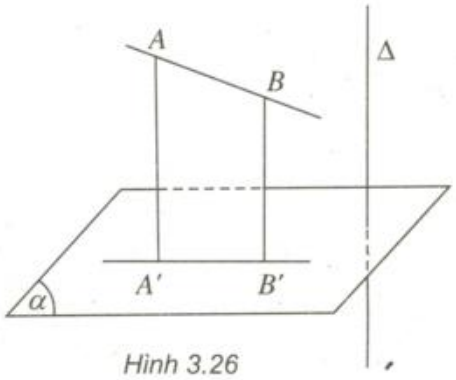


Hình 3.25

V. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC VÀ ĐỊNH LÍ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC

1. Phép chiếu vuông góc

Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α). Phép chiếu song song theo phương của Δ lên mặt phẳng (α) được gọi là *phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng* (α) (h.3.26).



Hình 3.26

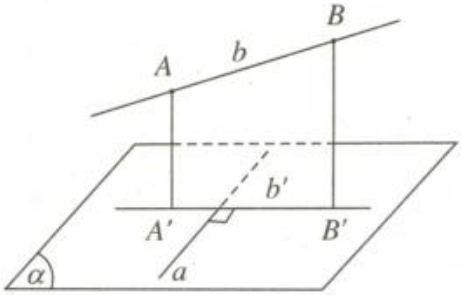
Nhận xét. Phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên có đầy đủ các tính chất của phép chiếu song song. Chú ý rằng người ta còn dùng tên gọi "phép chiếu lên mặt phẳng (α)" thay cho tên gọi "phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α)" và dùng tên gọi $\mathscr{H}'$ là hình chiếu của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (α) thay cho tên gọi $\mathscr{H}'$ là hình chiếu vuông góc của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (α).

2. Định lí ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α). Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α). Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'.

Chứng minh

Trên đường thẳng b lấy hai điểm A, B phân biệt sao cho chúng không thuộc (α). Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu của A và B trên (α). Khi đó hình chiếu b' của b trên (α) chính là đường thẳng đi qua hai điểm A' và B' (h.3.27).



Hình 3.27

Vì a nằm trong (α) nên a vuông góc với AA'.

– Vậy nếu a vuông góc với b thì a vuông góc với mặt phẳng (b', b). Do đó a vuông góc với b'.

– Ngược lại nếu a vuông góc với b' thì a vuông góc với mặt phẳng (b', b). Do đó a vuông góc với b.

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

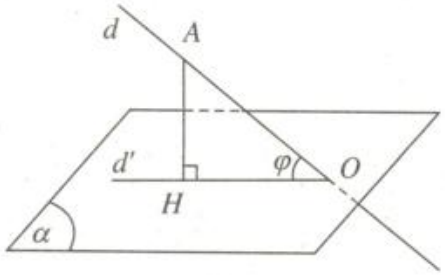
Định nghĩa

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α).

Trường hợp đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90°.

Trường hợp đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa d và hình chiếu d' của nó trên (α) gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α).

Khi d không vuông góc với (α) và d cắt (α) tại điểm O, ta lấy một điểm A tuỳ ý trên d khác với điểm O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (α) và φ là góc giữa d và (α) thì $\widehat{AOH} = \varphi$ (h.3.28).



Hình 3.28

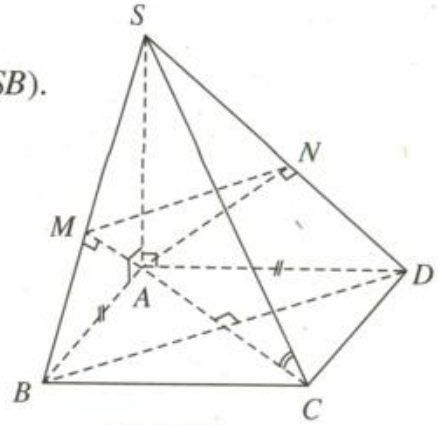
☞ ***Chú ý.*** Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta luôn có $0^o \le \varphi \le 90^o$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, có cạnh $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của điểm A lên các đường thẳng SB và SD. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (AMN).

b) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

Giải



Hình 3.29

a) Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp AS$, suy ra $BC \perp (ASB)$.

Từ đó suy ra $BC \perp AM$, mà $SB \perp AM$

nên $AM \perp (SBC)$. Do đó $AM \perp SC$ (h.3.29).

Tương tự ta chứng minh được $AN \perp SC$.

Vậy $SC \perp (AMN)$.

Do đó góc giữa SC và mặt phẳng (AMN) bằng 90°.

b) Ta có AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\widehat{SCA}$ là góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng $(ABCD)$. Tam giác vuông SAC cân tại A có $AS = AC = a\sqrt{2}$. Do đó $\widehat{SCA} = 45^o$.

BÀI TẬP

1. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai ?

a) Nếu $a \,//\, (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.

b) Nếu $a \,//\, (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.

c) Nếu $a \,//\, (\alpha)$ và $b \,//\, (\alpha)$ thì $b \,//\, a$.

d) Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \,//\, (\alpha)$.

2. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh rằng BC vuông góc với mặt phẳng (ADI).

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI, chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ và có $SA = SB = SC = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng :

a) Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$;

b) Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) và đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng (SAC).

4. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O tới mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng :

a) H là trực tâm của tam giác ABC ;

b) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

5. Trên mặt phẳng (α) cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho $SA = SC$, $SB = SD$. Chứng minh rằng :

a) $SO \perp (\alpha)$;

b) Nếu trong mặt phẳng (SAB) kẻ SH vuông góc với AB tại H thì AB vuông góc với mặt phẳng (SOH).

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I và K là hai điểm lần lượt lấy trên hai cạnh SB và SD sao cho $\dfrac{SI}{SB} = \dfrac{SK}{SD}$. Chứng minh :

a) BD vuông góc với SC ;

b) IK vuông góc với mặt phẳng (SAC).

7. Cho tứ diện $SABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có tam giác ABC vuông tại B. Trong mặt phẳng (SAB) kẻ AM vuông góc với SB tại M. Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SC}$. Chứng minh rằng :

a) $BC \perp (SAB)$ và $AM \perp (SBC)$;

b) $SB \perp AN$.

8. Cho điểm S không thuộc mặt phẳng (α) có hình chiếu trên (α) là điểm H. Với điểm M bất kì trên (α) và M không trùng với H, ta gọi SM là đường xiên và đoạn HM là hình chiếu của đường xiên đó. Chứng minh rằng :

a) Hai đường xiên bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu của chúng bằng nhau ;

b) Với hai đường xiên cho trước, đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn và ngược lại đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.