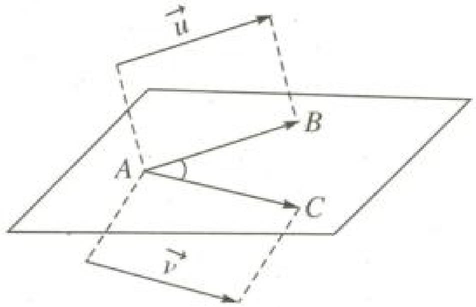
§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

I. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Góc giữa hai vectơ trong không gian

Định nghĩa

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác vectơ - không. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó ta gọi góc $\widehat{BAC}$ $(0^o \leq \widehat{BAC} \leq 180^o)$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong không gian, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$ (h.3.11).



Hình 3.11

1 Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm của cạnh AB. Hãy tính góc giữa các cặp vectơ sau đây :

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{CH}$ và $\overrightarrow{AC}$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Định nghĩa

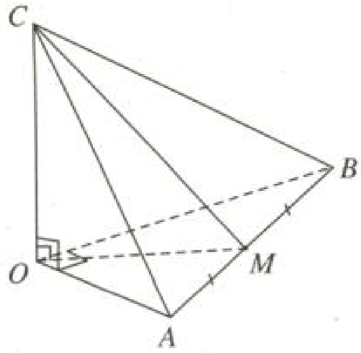
Trong không gian cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ đều khác vectơ - không. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u}.\vec{v}$, được xác định bởi công thức :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u}, \vec{v})}$$

Trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$ ta quy ước $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Giải



Hình 3.12

Ta có $\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{OM}|.|\overrightarrow{BC}|}$

$= \dfrac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BC}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}}$ (h.3.12).

Mặt khác $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$

$= \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}^2)$

Vì OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = 1$ nên

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 0 \text{ và } \overrightarrow{OB}^2 = 1.$$

Do đó $\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}) = -\dfrac{1}{2}\cdot$ Vậy $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}) = 120^{\circ}$.

△2 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BD}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$.

b) Tính $\cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{BD})$ và từ đó suy ra $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BD}$ vuông góc với nhau.

II. VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Định nghĩa

Vectơ $\vec{a}$ khác vectơ - không được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vectơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d (h.3.13).

Hình 3.13

2. Nhận xét

a) Nếu $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì vectơ $k\vec{a}$ với $k \neq 0$ cũng là vectơ chỉ phương của d.

b) Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của nó.

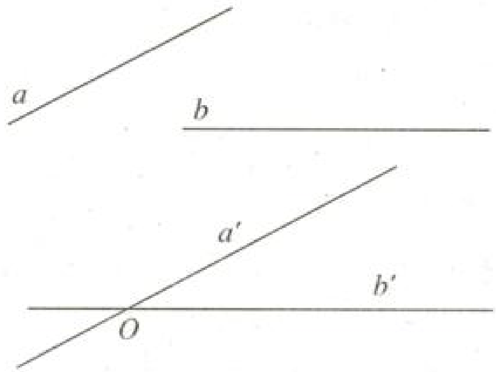
c) Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi chúng là hai đường thẳng phân biệt và có hai vectơ chỉ phương cùng phương.

III. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian cho hai đường thẳng a, b bất kì. Từ một điểm O nào đó ta vẽ hai đường thẳng a' và b' lần lượt song song với a và b. Ta nhận thấy rằng khi điểm O thay đổi thì góc giữa a' và b' không thay đổi. Do đó ta có định nghĩa :

1. Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a′ và b′ cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b (h.3.14).



Hình 3.14

2. Nhận xét

a) Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.

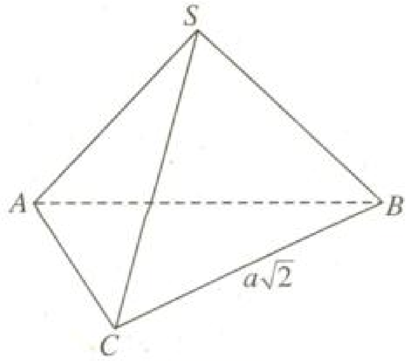
b) Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng a và $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng b và $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $0^o \leq \alpha \leq 90^o$ và bằng $180^o - \alpha$ nếu $90^o < \alpha \leq 180^o$. Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0^o.

3 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau đây :

a) AB và $B'C'$; b) AC và $B'C'$; c) $A'C'$ và $B'C$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

Giải



Hình 3.15

Ta có $\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}|.|\overrightarrow{AB}|}$

$= \dfrac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB}}{a.a}$ (h.3.15).

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{a^2}$$

Vì $CB^2 = (a\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2 = AC^2 + AB^2$ nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0$. Tam giác SAB đều nên $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB}) = 120^{\circ}$ và do đó $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} = a.a.\cos 120^{\circ} = -\dfrac{a^2}{2}\cdot$ Vậy :

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a^2} = -\frac{1}{2}\cdot$$ Do đó $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 120^{\circ}$.

Ta suy ra góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng $180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$.

IV. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Định nghĩa

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

Người ta kí hiệu hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau là $a \perp b$.

2. Nhận xét

a) Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì : $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

b) Cho hai đường thẳng song song. Nếu một đường thẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

c) Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng AB và PQ là hai đường thẳng vuông góc với nhau.

Giải

Ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$

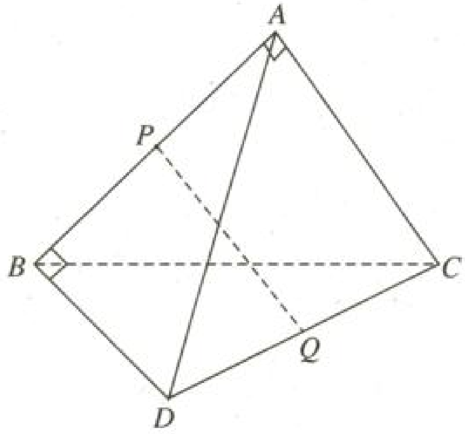
và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ}$ (h.3.16).

Do đó $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Vậy $2\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB} = 0$

hay $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = 0$ tức là $PQ \perp AB$.



Hình 3.16

4 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy nêu tên các đường thẳng đi qua hai đỉnh của hình lập phương đã cho và vuông góc với :

a) đường thẳng AB ; b) đường thẳng AC.

5 Tìm những hình ảnh trong thực tế minh hoạ cho sự vuông góc của hai đường thẳng trong không gian (trường hợp cắt nhau và trường hợp chéo nhau).

BÀI TẬP

1. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa các cặp vectơ sau đây :

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$; b) $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$; c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$.

2. Cho tứ diện $ABCD$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

b) Từ đẳng thức trên hãy suy ra rằng nếu tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$.

3. a) Trong không gian nếu hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b có song song với nhau không ?

b) Trong không gian nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a có vuông góc với c không ?

4. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC', $C'A$. Chứng minh rằng :

a) $AB \perp CC'$;

b) Tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

5. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

6. Trong không gian cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O'. Chứng minh rằng $AB \perp OO'$ và tứ giác $CDD'C'$ là hình chữ nhật.

7. Cho S là diện tích của tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}.$$

8. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Chứng minh rằng :

a) $AB \perp CD$;

b) Nếu M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$.