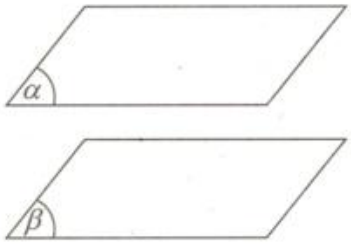
§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Hình 2.45

I. ĐỊNH NGHĨA

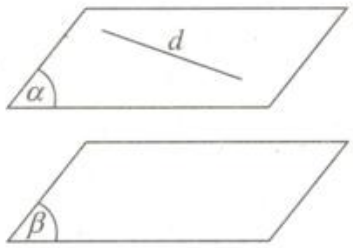
Hai mặt phẳng (α), (β) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Khi đó ta kí hiệu $(\alpha) // (\beta)$ hay $(\beta) // (\alpha)$ (h.2.46).



Hình 2.46

1 Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β). Đường thẳng d nằm trong (α) (h.2.47). Hỏi d và (β) có điểm chung không ?



Hình 2.47

II. TÍNH CHẤT

Định lí 1

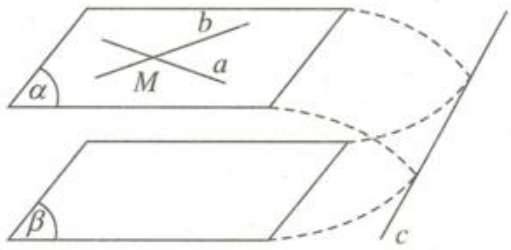
Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).

Chứng minh

Gọi M là giao điểm của a và b.

Vì (α) chứa a mà a song song với (β) nên (α) và (β) là hai mặt phẳng phân biệt. Ta cần chứng minh (α) song song với (β).

Giả sử (α) và (β) không song song và cắt nhau theo giao tuyến c (h.2.48). Ta có



Hình 2.48

$$\begin{cases} a // (\beta) \\ (\alpha) \supset a \\ (\alpha) \cap (\beta) = c \end{cases} \Rightarrow c // a$$

và $$\begin{cases} b // (\beta) \\ (\alpha) \supset b \\ (\alpha) \cap (\beta) = c \end{cases} \Rightarrow c // b.$$

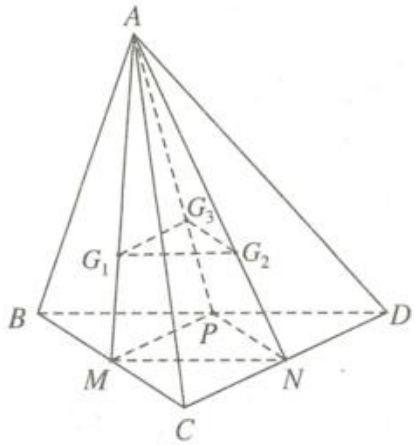
Như vậy từ M ta kẻ được hai đường thẳng a, b cùng song song với c. Theo định lí 1, §2, điều này mâu thuẫn. Vậy (α) và (β) phải song song với nhau.

△2 Cho tứ diện $SABC$. Hãy dựng mặt phẳng (α) qua trung điểm I của đoạn SA và song song với mặt phẳng (ABC).

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ABD. Chứng minh mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ song song với mặt phẳng (BCD).

Giải

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, DB (h.2.49). Ta có :



Hình 2.49

$M \in AG_1$ và $\dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{2}{3}$;

$N \in AG_2$ và $\dfrac{AG_2}{AN} = \dfrac{2}{3}$;

$P \in AG_3$ và $\dfrac{AG_3}{AP} = \dfrac{2}{3}$.

Do đó $\dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{AG_2}{AN}$ suy ra $G_1G_2 // MN$.

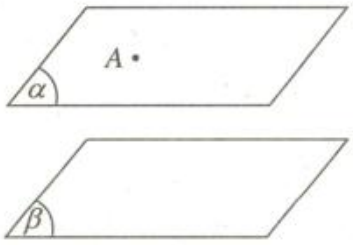
Vì MN nằm trong (BCD) nên $G_1G_2 // (BCD)$.

Tương tự $\dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{AG_3}{AP}$ suy ra $G_1G_3 // MP$. Vì MP nằm trong (BCD) nên $G_1G_3 // (BCD)$. Vậy $(G_1G_2G_3) // (BCD)$.

Ta biết rằng qua một điểm không thuộc đường thẳng d có duy nhất một đường thẳng d' song song với d. Nếu thay đường thẳng d bởi mặt phẳng (α) thì được kết quả sau.

Định lí 2

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho (h.2.50).

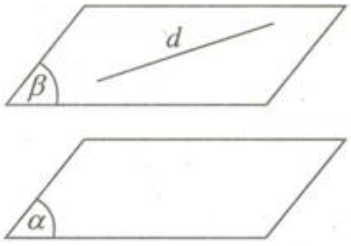


Hình 2.50

Từ định lí trên ta suy ra các hệ quả sau.

Hệ quả 1

Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α) (h.2.51).



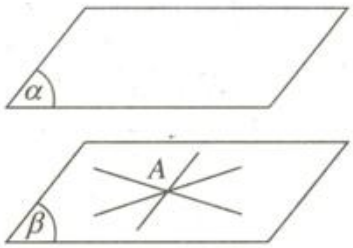
Hình 2.51

Hệ quả 2

Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Hệ quả 3

Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α) (h.2.52).



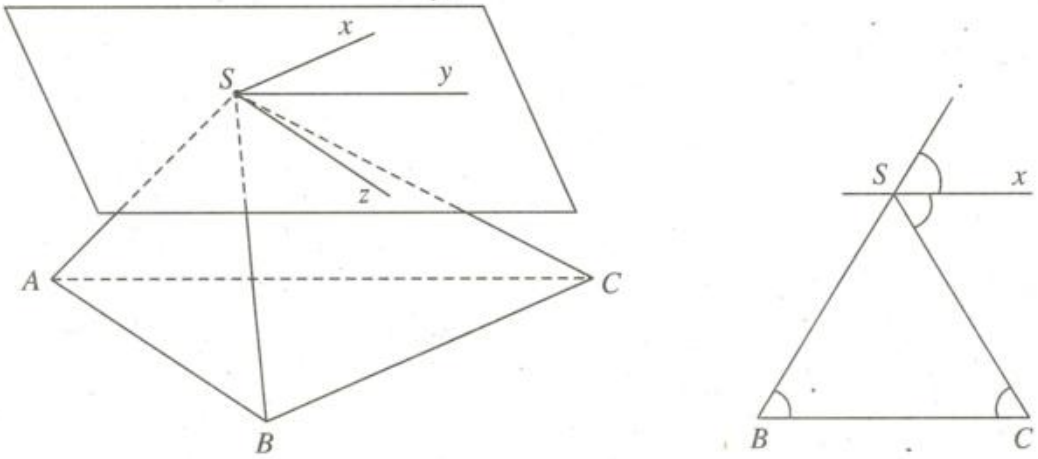
Hình 2.52

Ví dụ 2. Cho tứ diện $SABC$ có $SA = SB = SC$. Gọi Sx, Sy, Sz lần lượt là phân giác ngoài của các góc S trong ba tam giác SBC, SCA, SAB. Chứng minh :

a) Mặt phẳng (Sx, Sy) song song với mặt phẳng (ABC) ;

b) Sx, Sy, Sz cùng nằm trên một mặt phẳng.

Giải



Hình 2.53

a) Trong mặt phẳng (*SBC*), vì *Sx* là phân giác ngoài của góc *S* trong tam giác cân *SBC* (h.2.53) nên *Sx* // *BC*. Từ đó suy ra *Sx* // (*ABC*). (1)

Tương tự, ta có *Sy* // (*ABC*). (2) và Sz // (*ABC*).

Từ (1) và (2) suy ra : (*Sx*, *Sy*) // (*ABC*).

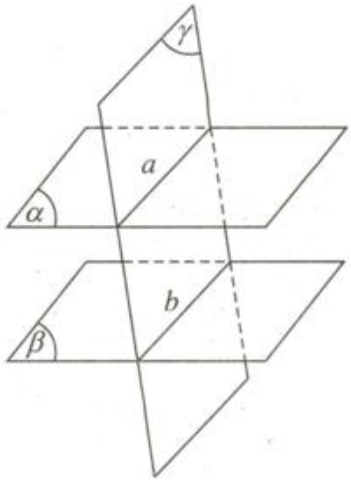
b) Theo hệ quả 3, định lí 2, ta có *Sx*, *Sy*, *Sz* là các đường thẳng cùng đi qua *S* và cùng song song với (*ABC*) nên *Sx*, *Sy*, *Sz* cùng nằm trên một mặt phẳng đi qua *S* và song song với (*ABC*).

Định lí 3

Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

Chứng minh

Gọi (α) và (β) là hai mặt phẳng song song. Giả sử (γ) cắt (α) theo giao tuyến *a*. Do (γ) chứa *a* (h.2.54) nên (γ) không thể trùng với (β). Vì vậy hoặc (γ) song song với (β) hoặc (γ) cắt (β). Nếu (γ) song song với (β) thì qua *a* ta có hai mặt phẳng (α) và (γ) cùng song song với (β). Điều này vô lí. Do đó (γ) phải cắt (β). Gọi giao tuyến của (γ) và (β) là *b*.



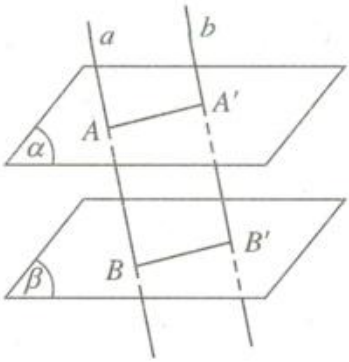
Hình 2.54

Ta có $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ mà $(\alpha) // (\beta)$ nên $a \cap b = \varnothing$. Vậy hai đường thẳng a và b cùng nằm trong một mặt phẳng (γ) và không có điểm chung nên $a // b$.

Hệ quả

Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

Chứng minh



Hình 2.55

Gọi (α) và (β) là hai mặt phẳng song song và (γ) là mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng song song a, b. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng a với (α) và (β) ; A', B' lần lượt là giao điểm của đường thẳng b với (α) và (β) (h.2.55). Theo định lí 3 ta có

$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ (\gamma) \cap (\alpha) = AA' \\ (\gamma) \cap (\beta) = BB'. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $AA' // BB'$.

Vì AB song song với $A'B'$ (do a song song với b) nên tứ giác $AA'B'B$ là hình bình hành.

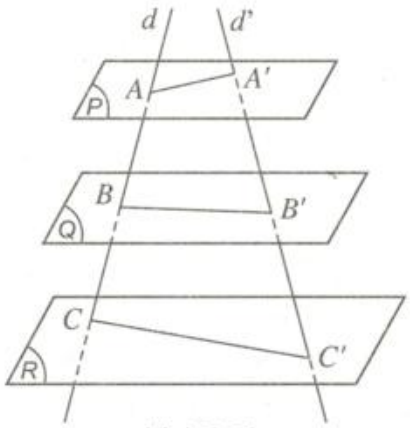
Vậy $AB = A'B'$.

III. ĐỊNH LÍ TA-LÉT (THALÈS)

3 Phát biểu định lí Ta-lét trong hình học phẳng.

Định lí 4 (Định lí Ta-lét)

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



Hình 2.56

Nếu d, d' là hai cát tuyến bất kì cắt ba mặt phẳng song song (α), (β), (γ) lần lượt tại các điểm A, B, C và A', B', C' (h.2.56) thì

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

IV. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α'). Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$. Qua các đỉnh A_1, A_2, ..., A_n ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (α') lần lượt tại A'_1, A'_2, ..., A'_n.

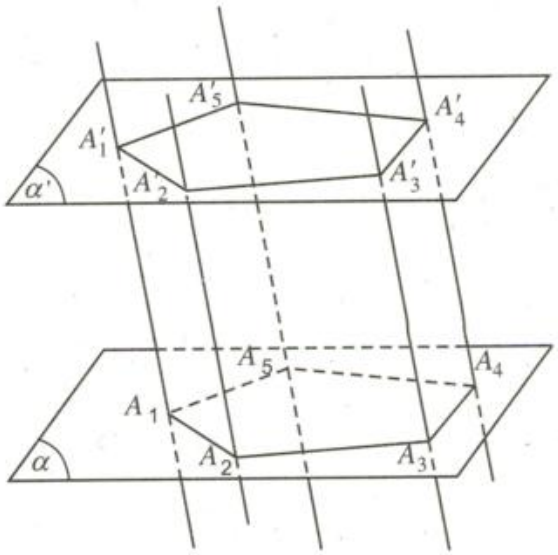
Hình gồm hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n$, $A'_1A'_2 \dots A'_n$ và các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2$, $A_2A'_2A'_3A_3$, ..., $A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là *hình lăng trụ* và được kí hiệu là $A_1A_2 \dots A_n.A'_1A'_2 \dots A'_n$ (h.2.57).

– Hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và $A'_1A'_2 \dots A'_n$ được gọi là hai *mặt đáy* của hình lăng trụ.

– Các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2$,..., $A_nA'_n$ được gọi là các *cạnh bên* của hình lăng trụ.

– Các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2$, $A_2A'_2A'_3A_3$, ..., $A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.

– Các đỉnh của hai đa giác được gọi là các *đỉnh* của hình lăng trụ.

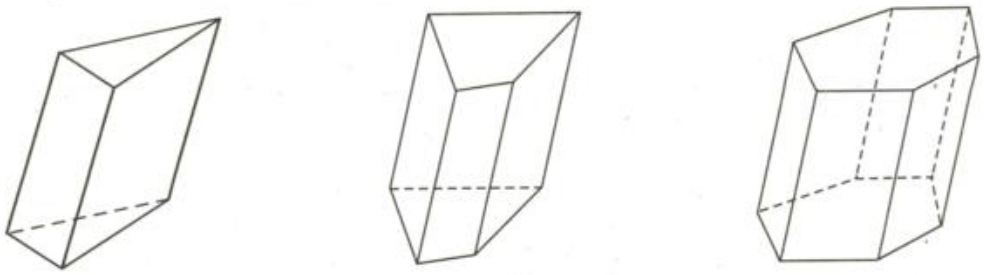


Hình 2.57

Nhận xét

- Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.
- Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.
- Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Người ta gọi tên của hình lăng trụ dựa vào tên của đa giác đáy, xem hình 2.58.

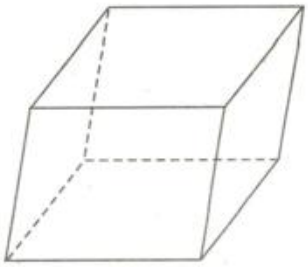


Hình lăng trụ tam giác — Hình lăng trụ tứ giác — Hình lăng trụ lục giác

Hình 2.58

• Hình lăng trụ có đáy là hình tam giác được gọi là *hình lăng trụ tam giác*.

• Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp* (h.2.59).

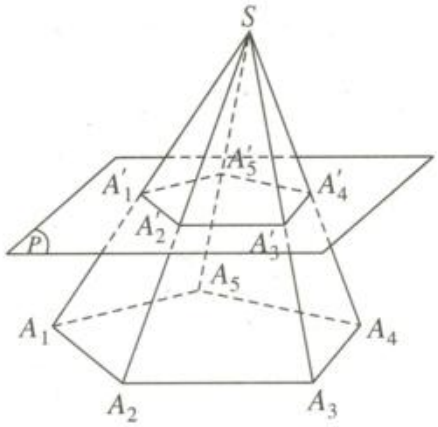


Hình 2.59

V. HÌNH CHÓP CỤT

Định nghĩa

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$; một mặt phẳng (P) không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy của hình chóp cắt các cạnh SA_1, SA_2, ..., SA_n lần lượt tại A'_1, A'_2, ..., A'_n. Hình tạo bởi thiết diện $A'_1A'_2 ... A'_n$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các tứ giác $A'_1A'_2A_2A_1$, $A'_2A'_3A_3A_2$, ..., $A'_nA'_1A_1A_n$ gọi là *hình chóp cụt* (h.2.60).



Hình 2.60

Đáy của hình chóp gọi là *đáy lớn* của hình chóp cụt, còn thiết diện $A'_1A'_2 ... A'_n$ gọi là *đáy nhỏ* của hình chóp cụt. Các tứ giác $A'_1A'_2A_2A_1$, $A'_2A'_3A_3A_2$, ..., $A'_nA'_1A_1A_n$ gọi là các *mặt bên* của hình chóp cụt. Các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2$,..., $A_nA'_n$ gọi là các *cạnh bên* của hình chóp cụt.

Tuỳ theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác ..., ta có *hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chóp cụt ngũ giác, ...*

Vì hình chóp cụt được cắt ra từ một hình chóp nên ta dễ dàng suy ra các tính chất sau đây của hình chóp cụt.

Tính chất

1) Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.

2) Các mặt bên là những hình thang.

3) Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng (α) cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d song song với nhau và không nằm trên (α). Trên a, b, c lần lượt lấy ba điểm A', B', C' tuỳ ý.

a) Hãy xác định giao điểm D' của đường thẳng d với mặt phẳng $(A'B'C')$.

b) Chứng minh $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và $B'C'$.

a) Chứng minh rằng AM song song với $A'M'$.

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng $(AB'C')$ với đường thẳng $A'M$.

c) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.

d) Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng $(AM'M)$.
Chứng minh G là trọng tâm của tam giác $AB'C'$.

3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (BDA') và $(B'D'C)$ song song với nhau.

b) Chứng minh rằng đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1 và G_2 của hai tam giác BDA' và $B'D'C$.

c) Chứng minh G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

d) Gọi O và I lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABCD$ và $AA'C'C$. Xác định thiết diện của mặt phẳng $(A'IO)$ với hình hộp đã cho.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A_1 là trung điểm của cạnh SA và A_2 là trung điểm của đoạn AA_1. Gọi (α) và (β) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng $(ABCD)$ và lần lượt đi qua A_1, A_2. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B_1, C_1, D_1. Mặt phẳng (β) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B_2, C_2, D_2. Chứng minh :

a) B_1, C_1, D_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC, SD ;

b) $B_1B_2 = B_2B$, $C_1C_2 = C_2C$, $D_1D_2 = D_2D$;

c) Chỉ ra các hình chóp cụt có một đáy là tứ giác $ABCD$.