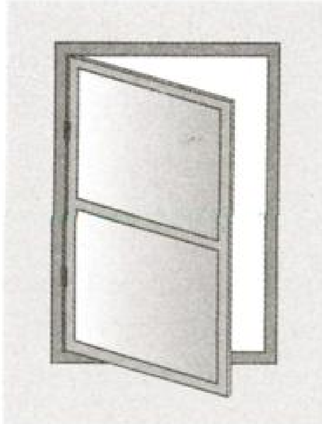
§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Hình ảnh của một cánh cửa chuyển động và hình ảnh của bề mặt bức tường cho ta thấy được sự thay đổi của góc giữa hai mặt phẳng.

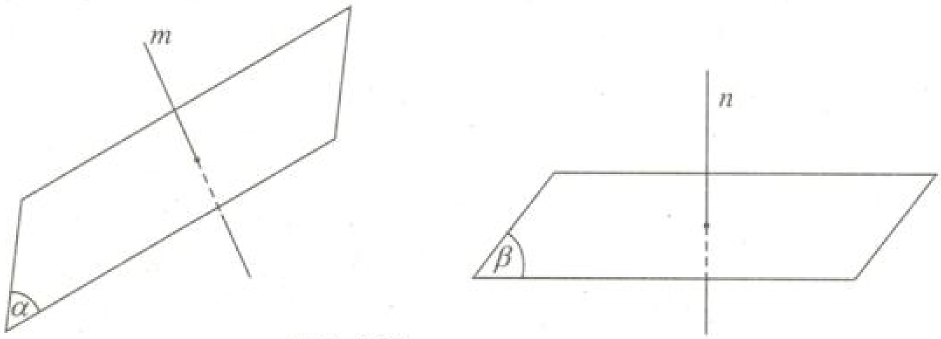


I. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa

> *Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó* (h.3.30).

Nếu hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì ta nói rằng góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 0^{o}.

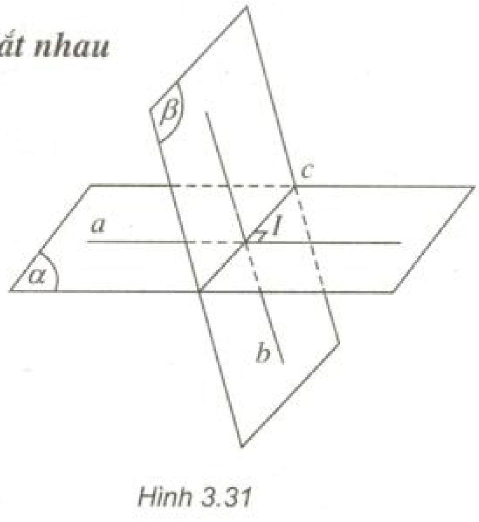


Hình 3.30

2. Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau

Giả sử hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến c. Từ một điểm I bất kì trên c ta dựng trong (α) đường thẳng a vuông góc với c và dựng trong (β) đường thẳng b vuông góc với c.

Người ta chứng minh được góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng a và b (h.3.31).



Hình 3.31

3. Diện tích hình chiếu của một đa giác

Người ta đã chứng minh tính chất sau đây :

Cho đa giác $\mathscr{H}$ nằm trong mặt phẳng (α) có diện tích S và $\mathscr{H}'$ là hình chiếu vuông góc của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (β). Khi đó diện tích S' của $\mathscr{H}'$ được tính theo công thức :

$$\boxed{S' = S\cos\varphi}$$

với φ là góc giữa (α) và (β).

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = \dfrac{a}{2}\cdot$

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC).

b) Tính diện tích tam giác SBC.

Giải

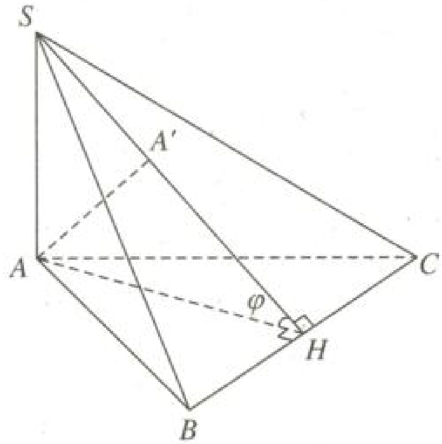
a) Gọi H là trung điểm của cạnh BC. Ta có $BC \perp AH$. (1)

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAH)$ nên $BC \perp SH$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng $\widehat{SHA}$. Đặt $\varphi = \widehat{SHA}$ (h.3.32), ta có

$$\tan\varphi = \frac{SA}{AH} = \frac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot$$

Ta suy ra $\varphi = 30^{\circ}$.



Hình 3.32

Vậy góc giữa (ABC) và (SBC) bằng 30°.

b) Vì $SA \perp (ABC)$ nên tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác SBC. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của các tam giác SBC và ABC. Ta có

$$S_2 = S_1.\cos\varphi \Rightarrow S_1 = \frac{S_2}{\cos\varphi}\cdot$$

Suy ra : $S_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2}{2}\cdot$

II. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1. Định nghĩa

> *Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông.*

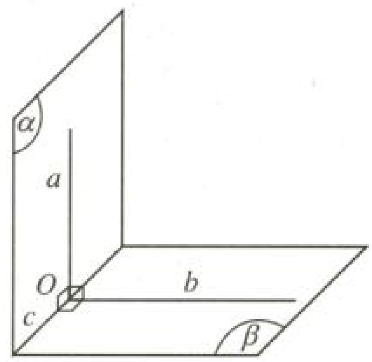
Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau ta kí hiệu $(\alpha) \perp (\beta)$.

2. Các định lí

> **Định lí 1**
>
> *Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.*

Chứng minh

Giả sử (α), (β) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi c là giao tuyến của (α) và (β). Từ điểm O thuộc c, trong mặt phẳng (α) vẽ đường thẳng a vuông góc với c và trong (β) vẽ đường thẳng b vuông góc với c (h.3.33). Ta có góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β). Vì (α) vuông góc với (β) nên góc giữa hai đường thẳng a và b bằng 90°, nghĩa là a vuông góc với b. Mặt khác theo cách dựng ta có a vuông góc với c.



Hình 3.33

Do đó a vuông góc với mặt phẳng (c, b) hay a vuông góc với (β).

Lí luận tương tự ta tìm được trong mặt phẳng (β) đường thẳng b vuông góc với (α).

Ngược lại, giả sử mặt phẳng (α) có chứa một đường thẳng a' vuông góc với mặt phẳng (β). Gọi O' là giao điểm của a' với (β) thì tất nhiên O' thuộc giao tuyến c của (α) và (β). Trong mặt phẳng (β) dựng đường thẳng b' đi qua O' và vuông góc với c. Vì a' vuông góc với (β) nên a' vuông góc với c và a' vuông góc với b'. Mặt khác ta có a' vuông góc với c và b' vuông góc với c nên góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng a', b' và bằng 90°. Vậy (α) vuông góc với (β).

1 Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Chứng minh rằng nếu có một đường thẳng Δ nằm trong (α) và Δ vuông góc với d thì Δ vuông góc với (β).

Hệ quả 1

Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Hệ quả 2

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (α) ta dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (α).

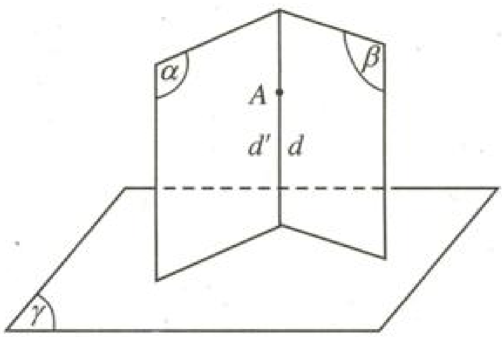
Định lí 2

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

Chứng minh

Giả sử (α) và (β) là hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng (γ).

Từ một điểm A trên giao tuyến d của hai mặt phẳng (α) và (β) ta dựng đường thẳng d' vuông góc với mặt phẳng (γ). Theo hệ quả 2 thì d' nằm trong (α) và d' nằm trong (β). Vậy d' trùng với d nghĩa là d vuông góc với (γ) (h.3.34).



Hình 3.34

2 Cho tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh rằng các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ADB) cũng đôi một vuông góc với nhau.

3 Cho hình vuông $ABCD$. Dựng đoạn thẳng AS vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông $ABCD$.

a) Hãy nêu tên các mặt phẳng lần lượt chứa các đường thẳng SB, SC, SD và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD).

III. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

1. Định nghĩa

> *Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với các mặt đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.*

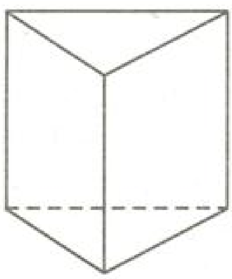
• Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, v.v... được gọi là *hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác, hình lăng trụ đứng ngũ giác, v.v...*

• Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều được gọi là *hình lăng trụ đều*. Ta có các loại lăng trụ đều như *hình lăng trụ tam giác đều, hình lăng trụ tứ giác đều, hình lăng trụ ngũ giác đều ...*

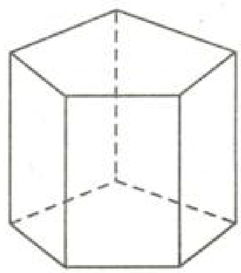
• Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp đứng*.

• Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là *hình hộp chữ nhật*.

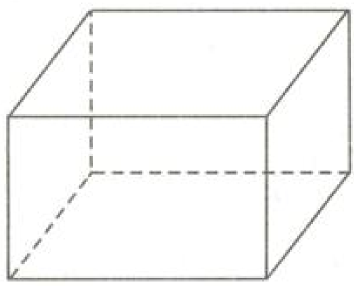
• Hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông được gọi là *hình lập phương*.



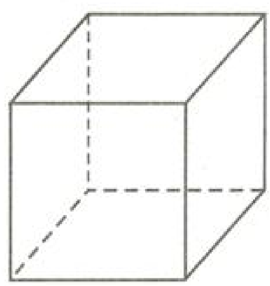
Hình lăng trụ đứng tam giác



Hình lăng trụ đứng ngũ giác



Hình hộp chữ nhật



Hình lập phương

Hình 3.35

4 Cho biết mệnh đề nào sau đây là đúng ?

a) Hình hộp là hình lăng trụ đứng.

b) Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng.

c) Hình lăng trụ là hình hộp.

d) Có hình lăng trụ không phải là hình hộp.

2. Nhận xét

Các mặt bên của hình lăng trụ đứng luôn luôn vuông góc với mặt phẳng đáy và là những hình chữ nhật.

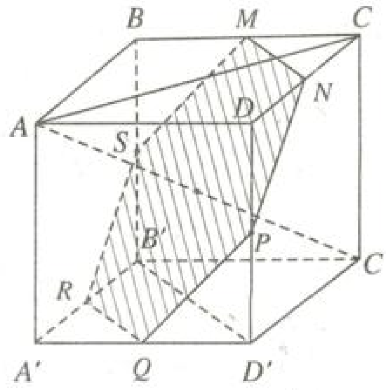
5 Sáu mặt của hình hộp chữ nhật có phải là những hình chữ nhật không ?

Ví dụ. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng trung trực (α) của đoạn AC'.

Giải

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $MA = MC' = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ nên M thuộc mặt phẳng trung trực của AC' (h.3.36).

Gọi N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của CD, DD', $D'A'$, $A'B'$, $B'B$. Chứng minh tương tự như trên ta có các điểm này đều thuộc mặt phẳng trung trực của AC'. Vậy thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng trung trực (α) của đoạn AC' là hình lục giác đều $MNPQRS$ có cạnh bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Hình 3.36

Diện tích S của thiết diện cần tìm là :

$$S = 6\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

IV. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

1. Hình chóp đều

Cho hình chóp đỉnh S có đáy là đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy $(A_1A_2 \dots A_n)$. Khi đó đoạn thẳng SH gọi là *đường cao* của hình chóp và H gọi là *chân đường cao.*

Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

Nhận xét

a) Hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

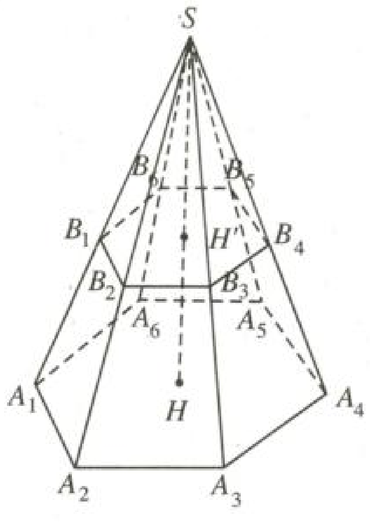
b) Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

2. Hình chóp cụt đều

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

Ví dụ hình $A_1A_2A_3A_4A_5A_6.B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ trong hình 3.37 là một hình chóp cụt đều. Hai đáy của hình chóp cụt đều là hai đa giác đều và đồng dạng với nhau.

Nhận xét. Các mặt bên của hình chóp cụt đều là những hình thang cân và các cạnh bên của hình chóp cụt đều có độ dài bằng nhau.



Hình 3.37

△6 Chứng minh rằng hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau.

△7 Có tồn tại một hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có hai mặt bên (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy hay không ?

Bạn có biết ?

Kim tự tháp Kê-ốp (Chéops)

Kim tự tháp Kê-ốp do ông vua Kê-ốp của nước Ai Cập chủ trì việc xây dựng. Đây là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập. Tháp này được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên và được xem là một trong bảy kì quan của thế giới. Tháp có hình dạng là một khối chóp tứ giác đều và có đáy là một hình vuông mỗi cạnh dài khoảng 230 m. Trước đây chiều cao của tháp là 147 m, nay do bị bào mòn ở đỉnh nên chiều cao của tháp chỉ còn khoảng 138 m. Người ta không biết người cổ Ai Cập đã xây dựng tháp bằng cách nào, làm thế nào để lắp ghép các tảng đá lại với nhau và làm thế nào để đưa được các tảng đá nặng và to lên các độ cao cần thiết. Tháp nặng khoảng sáu triệu tấn và được lắp ghép bởi 2 300 000 tảng đá. Thật là một công trình kì vĩ !

BÀI TẬP

1. Cho ba mặt phẳng (α), (β), (γ), mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) Nếu $(\alpha) \perp (\beta)$ và $(\alpha) // (\gamma)$ thì $(\beta) \perp (\gamma)$;

b) Nếu $(\alpha) \perp (\beta)$ và $(\alpha) \perp (\gamma)$ thì $(\beta) // (\gamma)$.

2. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Người ta lấy trên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng đó hai điểm A và B sao cho $AB = 8$ cm. Gọi C là một điểm trên (α) và D là một điểm trên (β) sao cho AC và BD cùng vuông góc với giao tuyến Δ và $AC = 6$ cm, $BD = 24$ cm. Tính độ dài đoạn CD.

3. Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC vuông ở B. Một đoạn thẳng AD vuông góc với (α) tại A. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{ABD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) ;

b) Mặt phẳng (ABD) vuông góc với mặt phẳng (BCD) ;

c) $HK \parallel BC$ với H và K lần lượt là giao điểm của DB và DC với mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với DB.

4. Cho hai mặt phẳng (α), (β) cắt nhau và một điểm M không thuộc (α) và không thuộc (β). Chứng minh rằng qua điểm M có một và chỉ một mặt phẳng (P) vuông góc với (α) và (β). Nếu (α) song song với (β) thì kết quả trên sẽ thay đổi như thế nào ?

5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng :

a) Mặt phẳng $(AB'C'D)$ vuông góc với mặt phẳng $(BCD'A')$;

b) Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng $(A'BD)$.

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thoi cạnh a và có $SA = SB = SC = a$. Chứng minh rằng :

a) Mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc với mặt phẳng (SBD) ;

b) Tam giác SBD là tam giác vuông.

7. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng $(ADC'B')$ vuông góc với mặt phẳng $(ABB'A')$.

b) Tính độ dài đường chéo AC' theo a, b, c.

8. Tính độ dài đường chéo của một hình lập phương cạnh a.

9. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có SH là đường cao. Chứng minh $SA \perp BC$ và $SB \perp AC$.

10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng SO.

b) Gọi M là trung điểm của đoạn SC. Chứng minh hai mặt phẳng (MBD) và (SAC) vuông góc với nhau.

c) Tính độ dài đoạn OM và tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thoi tâm I cạnh a và có góc A bằng 60°, cạnh $SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAC).

b) Trong tam giác SCA kẻ IK vuông góc với SA tại K. Hãy tính độ dài IK.

c) Chứng minh $\widehat{BKD} = 90^\circ$ và từ đó suy ra mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SAD).