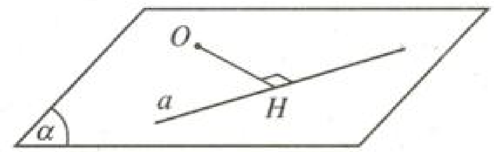
§5. KHOẢNG CÁCH

I. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm O và đường thẳng a. Trong mặt phẳng (O, a) gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên a. Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là *khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a* (h.3.38), kí hiệu là $d(O, a)$.

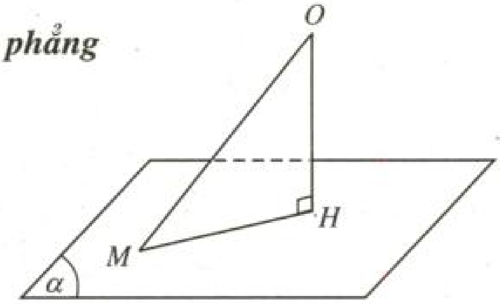


Hình 3.38

△1 Cho điểm O và đường thẳng a. Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a là bé nhất so với các khoảng cách từ O đến một điểm bất kì của đường thẳng a.

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Cho điểm O và mặt phẳng (α). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là *khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α)* (h.3.39) và được kí hiệu là $d(O, (\alpha))$.



Hình 3.39

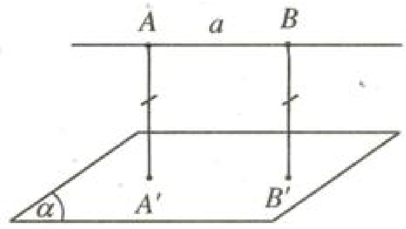
△2 Cho điểm O và mặt phẳng (α). Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α) là bé nhất so với các khoảng cách từ O tới một điểm bất kì của mặt phẳng (α).

II. KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG, GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Định nghĩa

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ *một điểm bất kì của a đến mặt phẳng (α), kí hiệu là d(a, (α))* (h.3.40).



Hình 3.40

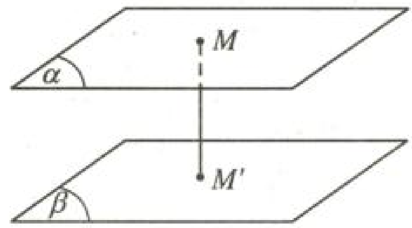
3 Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Chứng minh rằng khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là bé nhất so với khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc a tới một điểm bất kì thuộc mặt phẳng (α).

2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Định nghĩa

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia (h.3.41).

Ta kí hiệu khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau là $d((\alpha), (\beta))$. Khi đó $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta))$ với $M \in (\alpha)$, và $d((\alpha), (\beta)) = d(M', (\alpha))$ với $M' \in (\beta)$ (h.3.41).

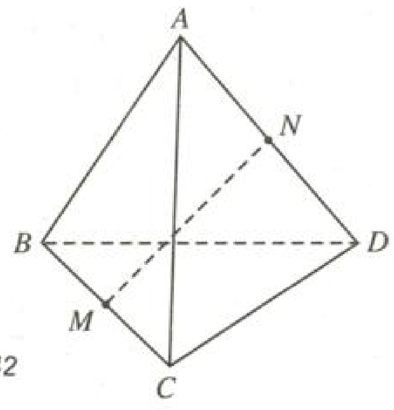


Hình 3.41

4 Cho hai mặt phẳng (α) và (β). Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) là nhỏ nhất trong các khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này tới một điểm bất kì của mặt phẳng kia.

III. ĐƯỜNG VUÔNG GÓC CHUNG VÀ KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

5 Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và AD. Chứng minh rằng : $MN \perp BC$ và $MN \perp AD$ (h.3.42).

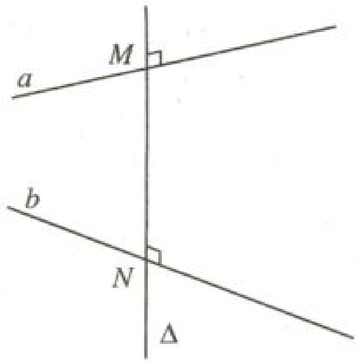


Hình 3.42

1. Định nghĩa

a) Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b.

b) Nếu đường vuông góc chung Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b lần lượt tại M, N thì độ dài đoạn thẳng MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b (h.3.43).

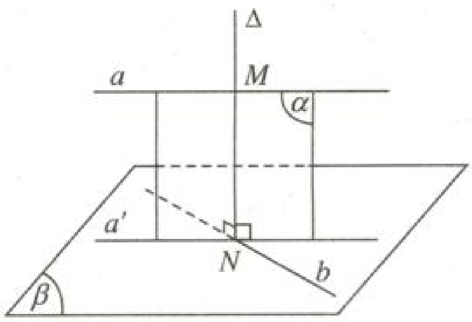


Hình 3.43

2. Cách tìm đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Gọi (β) là mặt phẳng chứa b và song song với a, a' là hình chiếu vuông góc của a trên mặt phẳng (β).

Vì $a \parallel (\beta)$ nên $a \parallel a'$. Do đó a' và b cắt nhau tại một điểm. Gọi điểm này là N. Gọi (α) là mặt phẳng chứa a và a', Δ là đường thẳng đi qua N và vuông góc với (β). Khi đó (α) vuông góc với (β). Như vậy Δ nằm trong (α) nên cắt đường thẳng a tại M và cắt đường thẳng b tại N, đồng thời Δ cùng vuông góc với cả a và b. Do đó Δ là đường vuông góc chung của a và b (h.3.44).

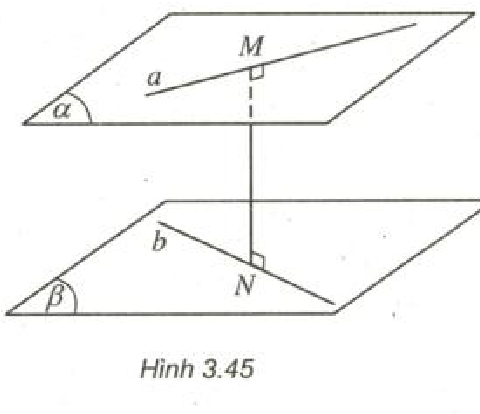


Hình 3.44

3. Nhận xét

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó (h.3.45).



Hình 3.45

△6 Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là bé nhất so với khoảng cách giữa hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng ấy.

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và BD.

Giải

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Trong mặt phẳng (SAC) vẽ $OH \perp SC$ (h.3.46).

Ta có $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$, suy ra $BD \perp OH$.

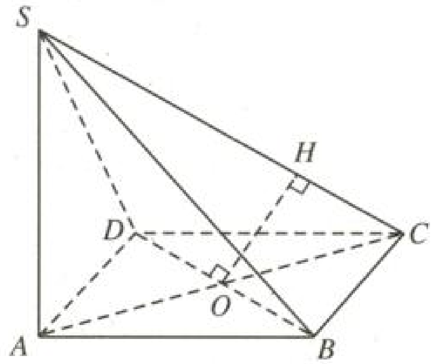
Mặt khác $OH \perp SC$. Vậy OH là đoạn vuông góc chung của SC và BD.

Độ dài đoạn OH là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và BD.

Hai tam giác vuông SAC và OHC đồng dạng vì có chung góc nhọn C.

Do đó $\dfrac{SA}{SC} = \dfrac{OH}{OC}$ (= sin$C$).

Vậy $OH = \dfrac{SA.OC}{SC}$.



Hình 3.46

Ta có $SA = a$, $OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$,

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2}$$
$$= \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$$

nên $OH = \dfrac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và BD là $OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

BÀI TẬP

1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng ?

a) Đường thẳng Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b nếu Δ vuông góc với a và Δ vuông góc với b ;

b) Gọi (P) là mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng a, b chéo nhau. Khi đó đường vuông góc chung Δ của a và b luôn luôn vuông góc với (P) ;

c) Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b thì Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (a, Δ) và (b, Δ) ;

d) Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Đường thẳng nào đi qua một điểm M trên a đồng thời cắt b tại N và vuông góc với b thì đó là đường vuông góc chung của a và b ;

e) Đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng chéo nhau a và b nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

2. Cho tứ diện $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC.

a) Chứng minh ba đường thẳng AH, SK, BC đồng quy.

b) Chứng minh rằng SC vuông góc với mặt phẳng (BHK) và HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).

c) Xác định đường vuông góc chung của BC và SA.

3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Chứng minh rằng các khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$.

a) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

a) Chứng minh rằng $B'D$ vuông góc với mặt phẳng $(BA'C')$.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD').

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

6. Chứng minh rằng nếu đường thẳng nối trung điểm hai cạnh AB và CD của tứ diện $ABCD$ là đường vuông góc chung của AB và CD thì $AC = BD$ và $AD = BC$.

7. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Tính khoảng cách từ S tới mặt đáy (ABC).

8. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối của tứ diện đều đó.