CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Thế nào là một phép biến hình, phép dời hình, phép đồng dạng ? Nêu mối liên hệ giữa phép dời hình và phép đồng dạng.

2. a) Hãy kể tên các phép dời hình đã học.

b) Phép đồng dạng có phải là phép vị tự không ?

3. Hãy nêu một số tính chất đúng đối với phép dời hình mà không đúng đối với phép đồng dạng.

4. Thế nào là hai hình bằng nhau, hai hình đồng dạng với nhau ? Cho ví dụ.

5. Cho hai điểm phân biệt A, B và đường thẳng d. Hãy tìm một phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép quay, phép vị tự thoả mãn một trong các tính chất sau :

a) Biến A thành chính nó ;

b) Biến A thành B ;

c) Biến d thành chính nó.

6. Nêu cách tìm tâm vị tự của hai đường tròn.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Tìm ảnh của tam giác AOF

a) Qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$;

b) Qua phép đối xứng qua đường thẳng BE ;

c) Qua phép quay tâm O góc 120°.

2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $A(-1 ; 2)$ và đường thẳng d có phương trình $3x + y + 1 = 0$. Tìm ảnh của A và d

a) Qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2 ; 1)$;

b) Qua phép đối xứng qua trục Oy ;

c) Qua phép đối xứng qua gốc toạ độ ;

d) Qua phép quay tâm O góc 90°.

3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn tâm $I(3 ; -2)$, bán kính 3.

a) Viết phương trình của đường tròn đó.

b) Viết phương trình ảnh của đường tròn $(I ; 3)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2 ; 1)$.

c) Viết phương trình ảnh của đường tròn $(I ; 3)$ qua phép đối xứng qua trục Ox.

d) Viết phương trình ảnh của đường tròn $(I ; 3)$ qua phép đối xứng qua gốc toạ độ.

4. Cho vectơ $\vec{v}$, đường thẳng d vuông góc với giá của $\vec{v}$. Gọi d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\vec{v}$. Chứng minh rằng phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là kết quả của việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua các đường thẳng d và d'.

5. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi O là tâm đối xứng của nó. Gọi I, F, J, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm ảnh của tam giác AEO qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường thẳng IJ và phép vị tự tâm B, tỉ số 2.

6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn tâm $I(1 ; -3)$, bán kính 2. Viết phương trình ảnh của đường tròn $(I ; 2)$ qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số 3 và phép đối xứng qua trục Ox.

7. Cho hai điểm A, B và đường tròn tâm O không có điểm chung với đường thẳng AB. Qua mỗi điểm M chạy trên đường tròn (O) dựng hình bình hành $MABN$. Chứng minh rằng điểm N thuộc một đường tròn xác định.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1. Trong các phép biến hình sau, phép nào không phải là phép dời hình ?

(A) Phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng ;

(B) Phép đồng nhất ;

(C) Phép vị tự tỉ số -1 ;

(D) Phép đối xứng trục.

2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

(A) Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó ;

(B) Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó ;

(C) Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó ;

(D) Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

3. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x - y + 1 = 0$. Để phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến d thành chính nó thì $\vec{v}$ phải là vectơ nào trong các vectơ sau ?

(A) $\vec{v} = (2 ; 1)$; (B) $\vec{v} = (2 ; -1)$;

(C) $\vec{v} = (1 ; 2)$; (D) $\vec{v} = (-1 ; 2)$.

4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\vec{v} = (2 ; -1)$ và điểm $M(-3 ; 2)$. Ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là điểm có toạ độ nào trong các toạ độ sau ?

(A) $(5 ; 3)$; (B) $(1 ; 1)$;

(C) $(-1 ; 1)$; (D) $(1 ; -1)$.

5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình : $3x - 2y + 1 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng trục Ox có phương trình là :

(A) $3x + 2y + 1 = 0$; (B) $-3x + 2y + 1 = 0$;

(C) $3x + 2y - 1 = 0$; (D) $3x - 2y + 1 = 0$.

6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình : $3x - 2y - 1 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng tâm O có phương trình là :

(A) $3x + 2y + 1 = 0$; (B) $-3x + 2y - 1 = 0$;

(C) $3x + 2y - 1 = 0$; (D) $3x - 2y - 1 = 0$.

7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

(A) Có một phép tịnh tiến biến mọi điểm thành chính nó ;

(B) Có một phép đối xứng trục biến mọi điểm thành chính nó ;

(C) Có một phép quay biến mọi điểm thành chính nó ;

(D) Có một phép vị tự biến mọi điểm thành chính nó.

8. Hình vuông có mấy trục đối xứng ?

(A) 1 ; (B) 2 ;

(C) 4 ; (D) vô số.

9. Trong các hình sau, hình nào có vô số tâm đối xứng ?

(A) Hai đường thẳng cắt nhau ; (B) Đường elip ;

(C) Hai đường thẳng song song ; (D) Hình lục giác đều.

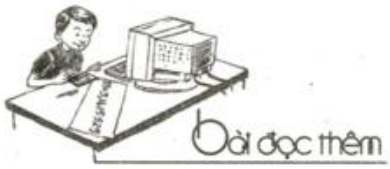
10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

(A) Hai đường thẳng bất kì luôn đồng dạng ;

(B) Hai đường tròn bất kì luôn đồng dạng ;

(C) Hai hình vuông bất kì luôn đồng dạng ;

(D) Hai hình chữ nhật bất kì luôn đồng dạng.



Áp dụng phép biến hình để giải toán

Bài toán 1

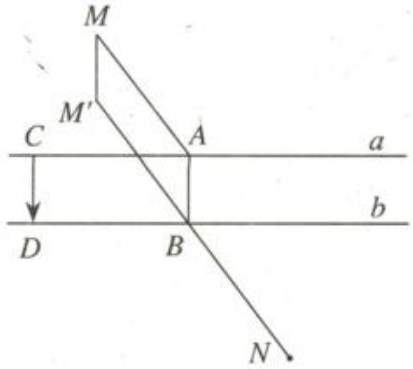
Hai thành phố M và N nằm ở hai phía của một con sông rộng có hai bờ a và b song song với nhau. M nằm phía bờ a, N nằm phía bờ b. Hãy tìm vị trí A nằm trên bờ a, B nằm trên bờ b để xây một chiếc cầu AB nối hai bờ sông đó sao cho AB vuông góc với hai bờ sông và tổng các khoảng cách $MA + BN$ ngắn nhất.

Giải

Giả sử đã tìm được các điểm A, B thoả mãn điều kiện của bài toán (h.1.69). Lấy các điểm C và D tương ứng thuộc a và b sao cho CD vuông góc với a. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{CD}$ biến A thành B và biến M thành điểm M'. Khi đó $MA = M'B$. Do đó :

$MA + BN$ ngắn nhất $\Leftrightarrow$ $M'B + BN$ ngắn nhất

$\Leftrightarrow$ M', B, N thẳng hàng.



Hình 1.69

Bài toán 2

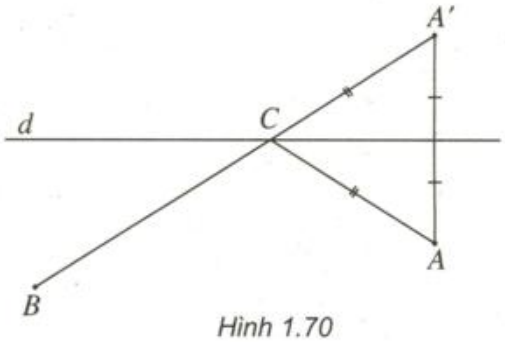
Trên một vùng đồng bằng có hai khu đô thị A và B nằm cùng về một phía đối với con đường sắt d (giả sử con đường đó thẳng). Hãy tìm một vị trí C trên d để xây dựng một nhà ga sao cho tổng các khoảng cách từ C đến trung tâm hai khu đô thị đó là ngắn nhất.

Từ bài toán thực tiễn trên ta có bài toán hình học sau :

Cho hai điểm A và B nằm về cùng một phía đối với đường thẳng d. Tìm trên d điểm C sao cho AC + CB ngắn nhất.

Giải

Giả sử đã tìm được điểm C. Gọi A' là ảnh của A qua phép đối xứng trục d.



Hình 1.70

Khi đó $AC = A'C$. Do đó :

$AC + CB$ ngắn nhất $\Leftrightarrow$ $A'C + CB$ ngắn nhất

$\Leftrightarrow$ B, C, A' thẳng hàng (h.1.70).

Bài toán 3

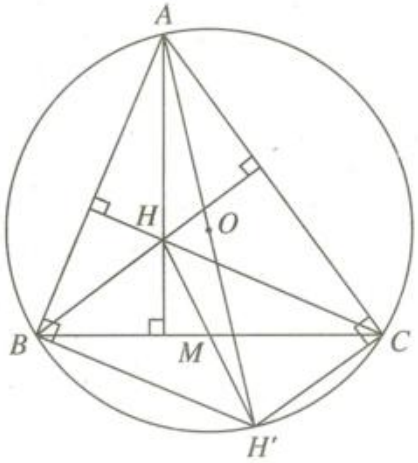
Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm của tam giác, M là trung điểm cạnh BC. Phép đối xứng tâm M biến H thành H'. Chứng minh rằng H' thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gợi ý

– Có nhận xét gì về tứ giác $BHCH'$, góc ABH' và góc ACH' (h.1.71) ?

– Chứng minh tứ giác $ABH'C$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Cố định B và C thì M cũng cố định. Khi A chạy trên (O) thì theo bài toán 3, H' cũng chạy trên (O). Vì trực tâm H là ảnh của H' qua phép đối xứng tâm M nên khi đó H sẽ chạy trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép đối xứng tâm M.



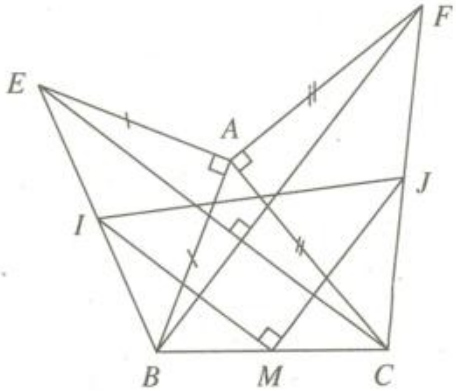
Hình 1.71

Bài toán 4

Cho tam giác ABC như hình 1.72. Dựng về phía ngoài của tam giác đó các tam giác BAE và CAF vuông cân tại A. Gọi I, M và J theo thứ tự là trung điểm của EB, BC và CF. Chứng minh rằng tam giác IMJ là tam giác vuông cân.

Giải

Xét phép quay tâm A, góc 90° (h.1.72). Phép quay này biến E và C lần lượt thành B và F. Từ đó suy ra $EC = BF$ và $EC \perp BF$. Vì IM là đường trung bình của tam giác BEC nên $IM \parallel EC$ và $IM = \frac{1}{2}EC$. Tương



Hình 1.72

tự, $MJ \parallel BF$ và $MJ = \frac{1}{2}BF$. Từ đó suy ra $IM = MJ$ và $IM \perp MJ$. Do đó tam giác IMJ vuông cân tại M.

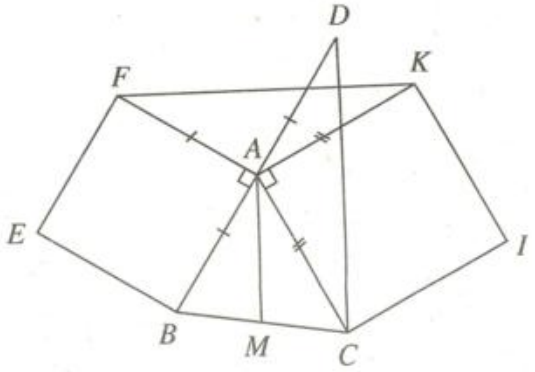
Bài toán 5

Cho tam giác ABC như hình 1.73. Dựng về phía ngoài của tam giác đó các hình vuông $ABEF$ và $ACIK$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với FK và $AM = \frac{1}{2}FK$.

Giải

Gọi D là ảnh của B qua phép đối xứng tâm A (h.1.73). Khi đó $AD = AB = AF$ và $AD \perp AF$. Phép quay tâm A góc 90° biến đoạn thẳng DC thành đoạn thẳng FK. Do đó $DC = FK$ và $DC \perp FK$. Vì AM là đường trung bình của tam giác BCD nên $AM \parallel CD$ và $AM = \frac{1}{2}CD$.

Từ đó suy ra $AM \perp FK$ và $AM = \frac{1}{2}FK$.



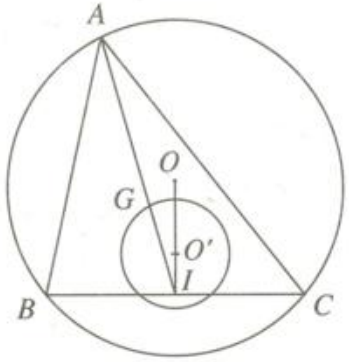
Hình 1.73

Bài toán 6

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Các đỉnh B, C cố định còn A chạy trên đường tròn đó. Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác ABC chạy trên một đường tròn.

Giải

Gọi I là trung điểm của BC. Do B và C cố định nên I cố định (h.1.74). Ta có G luôn thuộc IA sao cho $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$. Vậy có thể xem G là ảnh của A qua phép vị tự tâm I, tỉ số $\frac{1}{3}$. Gọi O' là ảnh của O qua phép vị tự đó, khi A chạy trên $(O\,;R)$ thì tập hợp các điểm G là đường tròn $\left(O'\,;\frac{1}{3}R\right)$ là ảnh của $(O\,;R)$ qua phép vị tự trên.



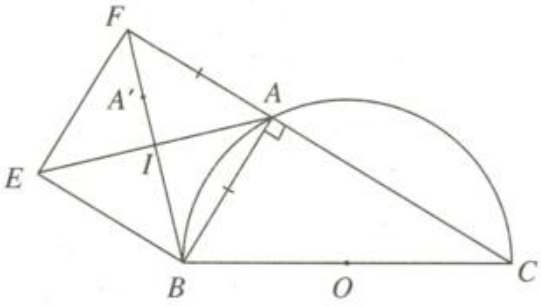
Hình 1.74

Bài toán 7

Cho điểm A nằm trên nửa đường tròn tâm O, đường kính BC như hình 1.75. Dựng về phía ngoài của tam giác ABC hình vuông $ABEF$. Gọi I là tâm đối xứng của hình vuông. Chứng minh rằng khi A chạy trên nửa đường tròn đã cho thì I chạy trên một nửa đường tròn.

Giải

Trên đoạn BF lấy điểm A' sao cho $BA' = BA$ (h.1.75). Do góc lượng giác $(BA\ ;\ BA')$ luôn bằng 45° và $\frac{BI}{BA'} = \frac{BI}{BA} = \frac{1}{2}\frac{BF}{BA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ không đổi, nên có thể xem A' là ảnh của A qua phép quay tâm B, góc 45° ; I là ảnh của A' qua phép vị tự tâm B tỉ số $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



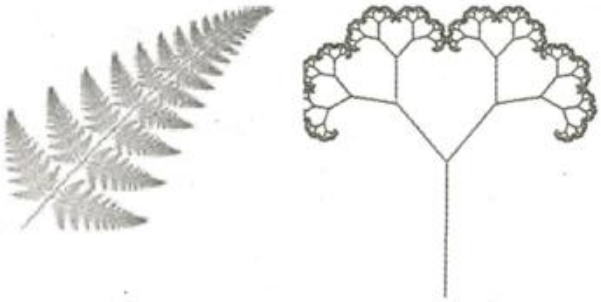
Hình 1.75

Do đó I là ảnh của A qua phép đồng dạng F có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm B, góc 45° và phép vị tự tâm B, tỉ số $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Từ đó suy ra khi A chạy trên nửa đường tròn (O) thì I cũng chạy trên nửa đường tròn (O') là ảnh của nửa đường tròn (O) qua phép đồng dạng F.

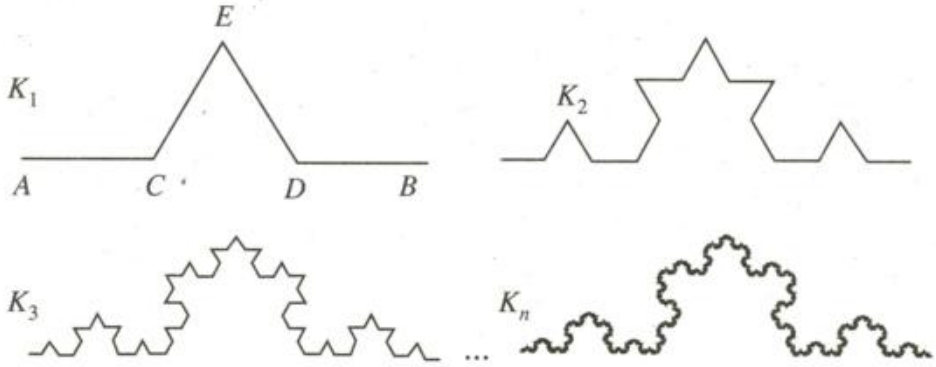
Giới thiệu về hình học frac-tan (fractal)

Bơ-noa Man-đen-bơ-rô (Benoit Mandelbrot – sinh năm 1924)

Quan sát cành dương xỉ hay hình vẽ bên ta thấy mỗi nhánh nhỏ của nó đều đồng dạng với hình toàn thể. Trong hình học người ta cũng gặp rất nhiều hình có tính chất như vậy. Những hình như thế gọi là những hình tự đồng dạng. Ta sẽ xét thêm một số hình sau đây.

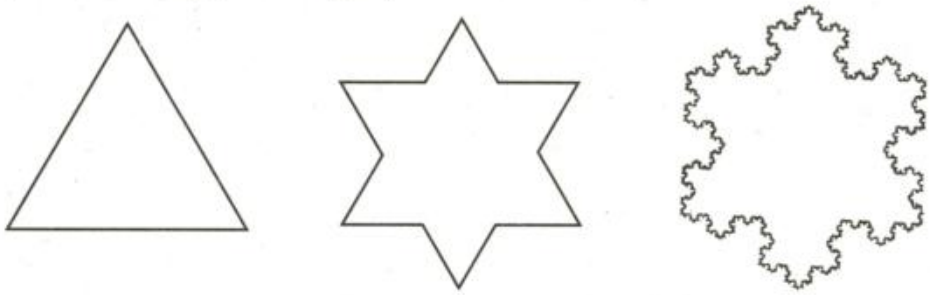


Cho đoạn thẳng AB. Chia đoạn thẳng đó thành ba đoạn bằng nhau $AC = CD = DB$. Dựng tam giác đều CED rồi bỏ đi khoảng CD. Ta sẽ được đường gấp khúc $ACEDB$ kí hiệu là K_1. Việc thay đoạn AB bằng đường gấp khúc $ACEDB$ gọi là một quy tắc sinh. Lặp lại quy tắc sinh đó cho các đoạn thẳng AC, CE, ED, DB ta được đường gấp khúc K_2. Lặp lại quy tắc sinh đó cho các đoạn thẳng của đường gấp khúc K_2 ta được đường gấp khúc K_3... . Lặp lại mãi quá trình đó ta được một đường gọi là đường Vôn Kốc (để ghi nhận người đầu tiên đã tìm ra nó vào năm 1904 – Nhà toán học Thuỵ Điển Helge Von Koch).



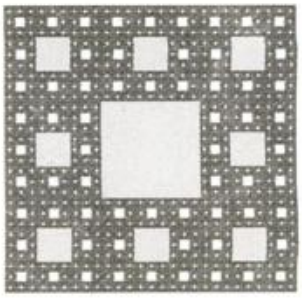
Đường Vôn Kốc

Cũng lặp lại quy tắc sinh như trên cho các cạnh của một tam giác đều ta được một hình gọi là bông tuyết Vôn Kốc.



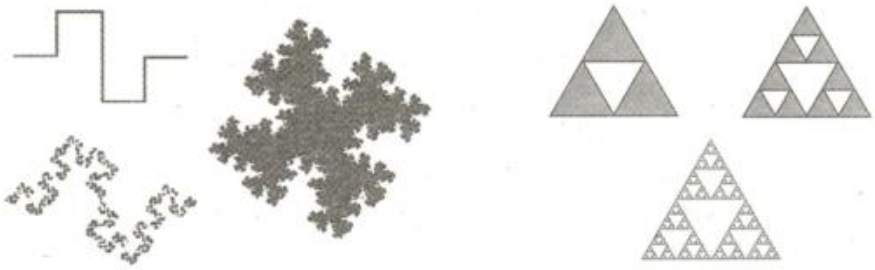
Bông tuyết Vôn Kốc

Bây giờ ta xuất phát từ một hình vuông. Chia nó thành chín hình vuông con bằng nhau rồi xoá đi phần trong của hình vuông con ở chính giữa ta được hình X_1. Ta lặp lại quá trình trên cho mỗi hình vuông con của X_1 ta sẽ được hình X_2. Tiếp tục mãi quá trình đó ta sẽ được một hình gọi là thảm Xéc-pin-xki (Sierpinski).



Các hình nêu ở trên là những hình tự đồng dạng hoặc một bộ phận của chúng là hình tự đồng dạng. Chúng được tạo ra bằng phương pháp lặp, có quy tắc sinh đơn giản nhưng sau một số bước trở thành những hình rất phức tạp. Những hình như thế gọi là các fractal (từ fractal có nghĩa là gãy, vỡ). Không phải hình tự đồng dạng nào cũng là một fractal. Một khoảng của đường thẳng cũng có thể xem là một hình tự đồng dạng nhưng không phải là một fractal.

Dưới đây là một số fractal khác.



Mặc dù các fractal đã được biết đến từ đầu thế kỉ XX, nhưng mãi đến thập niên 80 của thế kỉ XX nhà toán học Pháp gốc Ba Lan Bơ-noa Man-đen-bơ-rô (Benoit Mandelbrot) mới đưa ra một lí thuyết có hệ thống để nghiên cứu chúng. Ông gọi đó là Hình học fractal.

Ngày nay với sự hỗ trợ của công nghệ thông tin, Hình học fractal đang phát triển mạnh mẽ. Lí thuyết này có nhiều ứng dụng trong việc mô tả và nghiên cứu các cấu trúc gập gãy, lồi lõm, hỗn độn... của thế giới tự nhiên, điều mà hình học Ơ-clít thông thường chưa làm được. Nó cũng là một công cụ mới, có hiệu lực để góp phần nghiên cứu nhiều môn khoa học khác như Vật lí, Thiên văn, Địa lí, Sinh học, Xây dựng, Âm nhạc, Hội hoạ,...

Sau đây là số hình fractal trong tự nhiên.