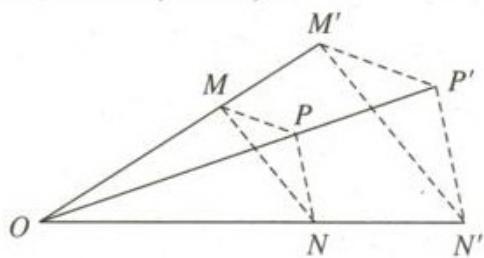


§7. PHÉP VỊ TỰ

I. ĐỊNH NGHĨA

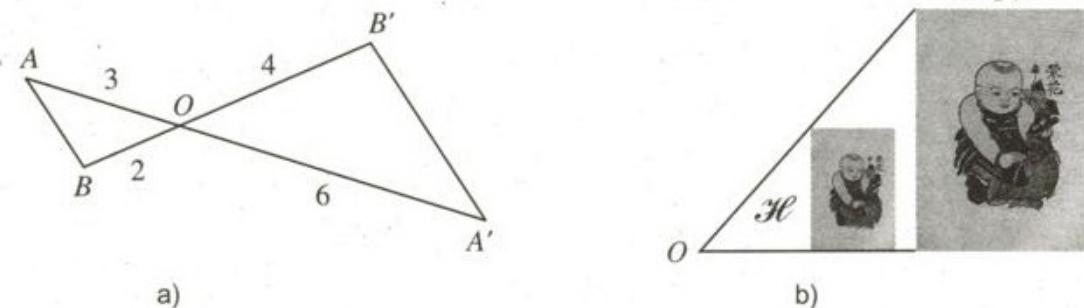
Định nghĩa

Cho điểm O và số $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O , tỉ số k (h.1.50).



Hình 1.50

Phép vị tự tâm O , tỉ số k thường được kí hiệu là $V_{(O,k)}$.



Hình 1.51

Ví dụ 1

- Trên hình 1.51a các điểm A' , B' , O lần lượt là ảnh của các điểm A , B , O qua phép vị tự tâm O tỉ số -2 .
- Trong hình 1.51b phép vị tự tâm O , tỉ số 2 biến hình \mathcal{H} thành hình \mathcal{H}' .

△1 Cho tam giác ABC . Gọi E và F tương ứng là trung điểm của AB và AC . Tìm một phép vị tự biến B và C tương ứng thành E và F .

Nhận xét

- 1) Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.
- 2) Khi $k = 1$, phép vị tự là phép đồng nhất.
- 3) Khi $k = -1$, phép vị tự là phép đối xứng qua tâm vị tự.
- 4) $M' = V_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{(O,\frac{1}{k})}(M')$.

△2 Chứng minh nhận xét 4.

II. TÍNH CHẤT

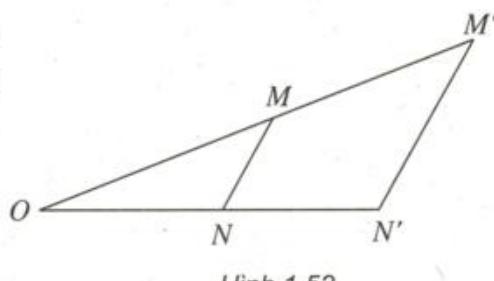
Tính chất 1

Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tùy ý theo thứ tự thành M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k| MN$.

Chứng minh

Gọi O là tâm của phép vị tự tỉ số k . Theo định nghĩa của phép vị tự ta có : $\overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON'} = k \overrightarrow{ON}$ (h.1.52). Do đó :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{ON} - k \overrightarrow{OM} \\ &= k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = k \overrightarrow{MN}. \end{aligned}$$



Hình 1.52

Từ đó suy ra $M'N' = |k| MN$.

Ví dụ 2. Gọi A', B', C' theo thứ tự là ảnh của A, B, C qua phép vị tự tỉ số k . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} = t \overrightarrow{AC}$, $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = t \overrightarrow{A'C'}$.

Giải

Gọi O là tâm của phép vị tự tỉ số k , ta có $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'C'} = k \overrightarrow{AC}$. Do đó :

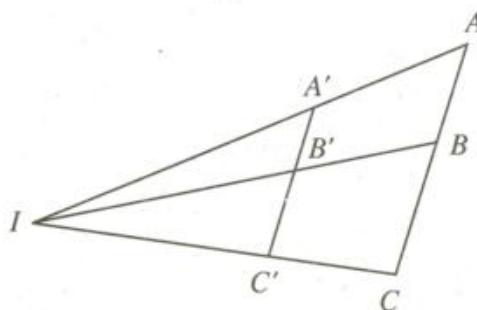
$$\overrightarrow{AB} = t \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{1}{k} \overrightarrow{A'B'} = t \frac{1}{k} \overrightarrow{A'C'} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = t \overrightarrow{A'C'}.$$

△3 Để ý rằng : điểm B nằm giữa hai điểm A và C khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = t \overrightarrow{AC}$, $0 < t < 1$. Sử dụng ví dụ trên chứng minh rằng nếu điểm B nằm giữa hai điểm A và C thì điểm B' nằm giữa hai điểm A' và C' .

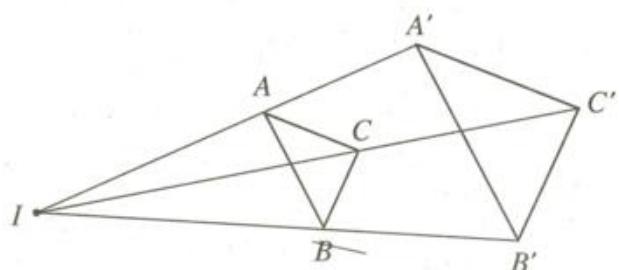
Tính chất 2

Phép vị tự tỉ số k :

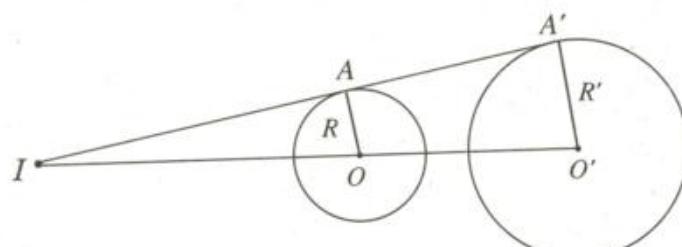
- a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy (h.1.53).
- b) Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- c) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó (h.1.54).
- d) Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|R$ (h.1.55).



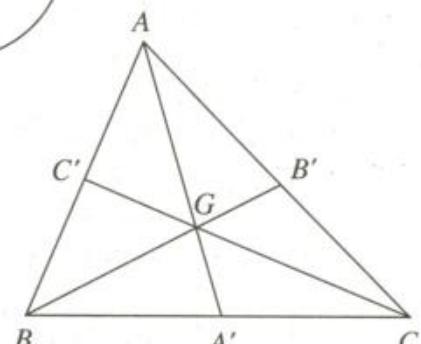
Hình 1.53



Hình 1.54



Hình 1.55



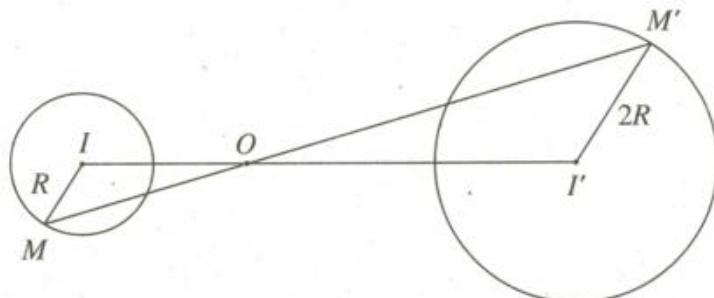
Hình 1.56

- Đ**4 Cho tam giác ABC có A', B', C' theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Tìm một phép vị tự biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ (h.1.56).

Ví dụ 3. Cho điểm O và đường tròn $(I; R)$. Tìm ảnh của đường tròn đó qua phép vị tự tâm O tỉ số -2 .

Giải

Ta chỉ cần tìm $I' = V_{(O,-2)}(I)$ bằng cách lấy trên tia đối của tia OI điểm I' sao cho $OI' = 2OI$. Khi đó ảnh của $(I; R)$ là $(I'; 2R)$ (h.1.57).



Hình 1.57

III. TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Ta đã biết phép vị tự biến đường tròn thành đường tròn. Ngược lại, ta có định lí sau

Định lí

Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Tâm của phép vị tự đó được gọi là *tâm vị tự của hai đường tròn*.

Cách tìm tâm vị tự của hai đường tròn

Cho hai đường tròn $(I; R)$ và $(I'; R')$.

Có ba trường hợp xảy ra :

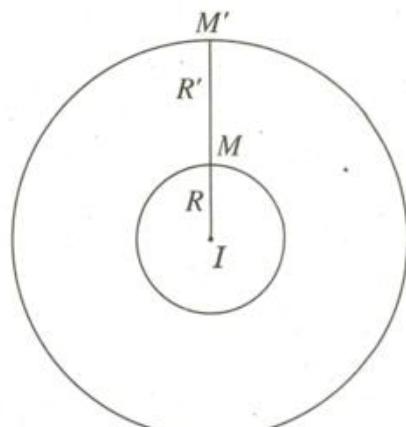
- *Trường hợp I trùng với I'*

Khi đó phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{R'}{R}$ và phép vị

tự tâm I tỉ số $-\frac{R'}{R}$ biến đường tròn $(I; R)$

thành đường tròn $(I'; R')$ (h.1.58).

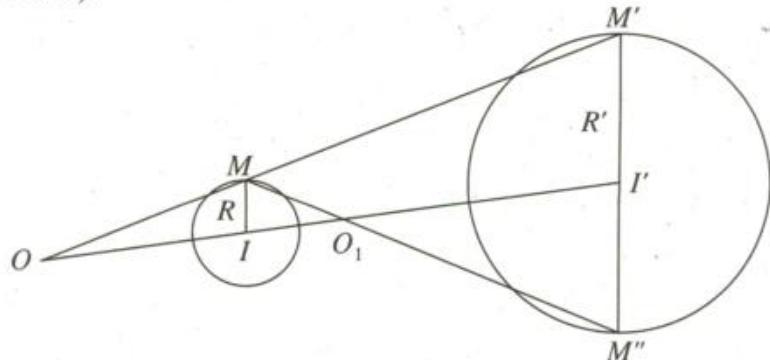
- *Trường hợp I khác I' và $R \neq R'$.*



Hình 1.58

Lấy điểm M bất kì thuộc đường tròn $(I; R)$, đường thẳng qua I' song song với IM cắt đường tròn $(I'; R')$ tại M' và M'' . Giả sử M, M' nằm cùng phía đối với đường thẳng II' còn M, M'' nằm khác phía đối với đường thẳng II' . Giả sử

đường thẳng MM' cắt đường thẳng II' tại điểm O nằm ngoài đoạn II' , còn đường thẳng MM'' cắt đường thẳng II' tại điểm O_1 nằm trong đoạn II' (h.1.59).



Hình 1.59

Khi đó phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k_1 = -\frac{R'}{R}$ sẽ biến đường tròn $(I; R)$ thành đường tròn $(I'; R')$. Ta gọi O là *tâm vị tự ngoài* còn O_1 là *tâm vị tự trong* của hai đường tròn nói trên.

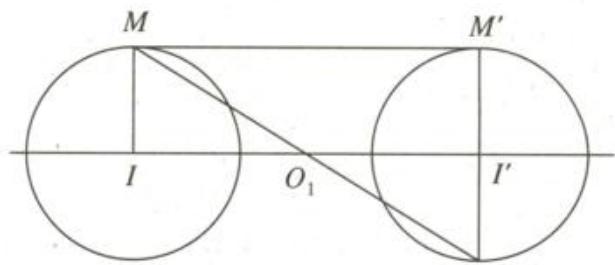
• *Trường hợp I khác I' và R = R'.*

Khi đó $MM' // II'$ nên chỉ có phép vị tự tâm O_1 tỉ số

$k = -\frac{R}{R} = -1$ biến đường tròn

$(I; R)$ thành đường tròn $(I'; R')$.

Nó chính là phép đối đối xứng tâm O_1 (h.1.60).

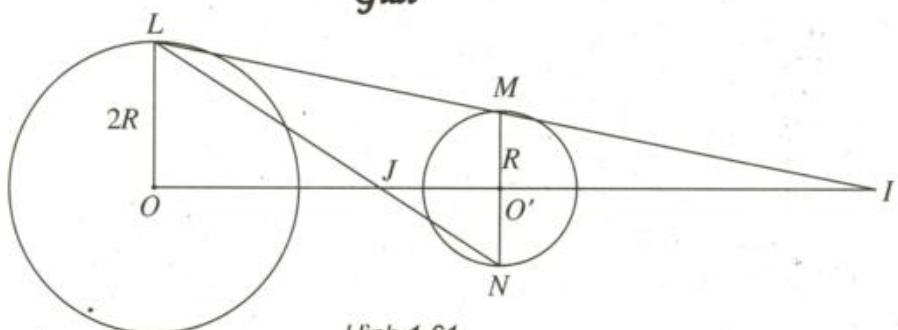


Hình 1.60

Ví dụ 4

Cho hai đường tròn $(O; 2R)$ và $(O'; R)$ nằm ngoài nhau. Tìm phép vị tự biến $(O; 2R)$ thành $(O'; R)$.

Giai

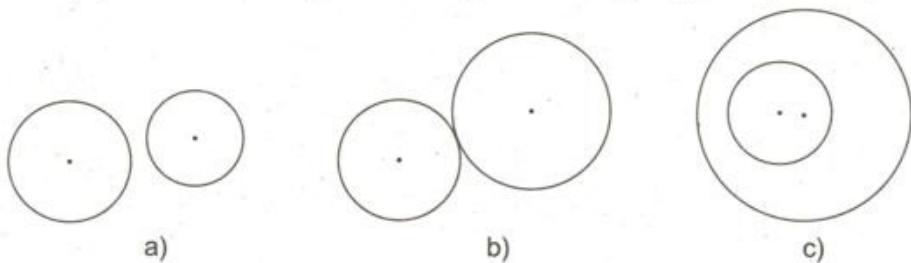


Hình 1.61

Lấy điểm L bất kì trên đường tròn $(O; 2R)$, đường thẳng qua O' , song song với OL cắt $(O'; R)$ tại M và N (h.1.61). Hai đường thẳng LM và LN cắt đường thẳng OO' lần lượt tại I và J . Khi đó các phép vị tự $V_{\left(I, \frac{1}{2}\right)}$ và $V_{\left(J, -\frac{1}{2}\right)}$ sẽ biến $(O; 2R)$ thành $(O'; R)$.

BÀI TẬP

- Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và H là trực tâm. Tìm ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm H , tỉ số $\frac{1}{2}$.
- Tìm tâm vị tự của hai đường tròn trong các trường hợp sau (h.1.62) :



Hình 1.62

- Chứng minh rằng khi thực hiện liên tiếp hai phép vị tự tâm O sẽ được một phép vị tự tâm O .