§1 LUỸ THỪA

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

1. Biết định nghĩa luỹ thừa với số mũ nguyên, căn bậc *n*, luỹ thừa với số mũ hữu tỉ, vô tỉ.

2. Biết cách áp dụng các tính chất của luỹ thừa với số mũ thực để giải toán.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

I – KHÁI NIỆM LUỸ THỪA

1. Luỹ thừa với số mũ nguyên

Ở THCS, học sinh đã biết khái niệm luỹ thừa với số mũ nguyên dương. Lần này, ta định nghĩa một cách tổng quát luỹ thừa với số mũ thực.

Cần lưu ý học sinh, định nghĩa $a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$ hoàn toàn phù hợp với quy tắc "giản ước" phân số.

Chẳng hạn, ta có

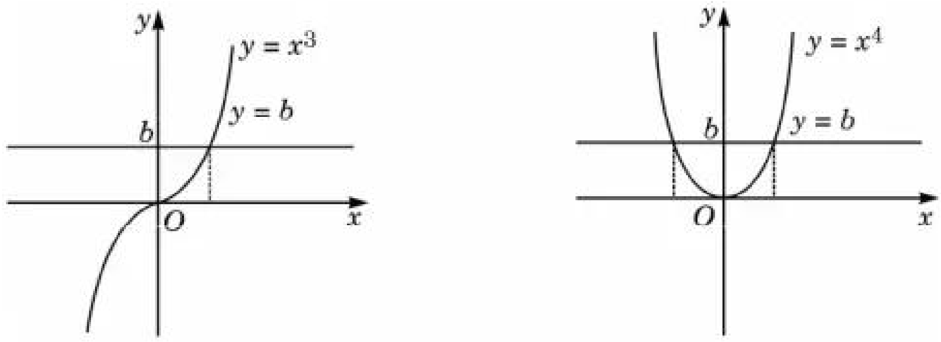
$$\frac{a^2}{a^2} = 1,\ a^{2-2} = a^0, \qquad \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}, \qquad a^{3-5} = a^{-2}.$$

Đáp án của hoạt động 1 : $(1{,}5)^4 = 5{,}0625$; $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3 = -\dfrac{8}{27}$; $\left(\sqrt{3}\right)^5 = 9\sqrt{3}$.

2. Phương trình $x^n = b$

Mục đích việc xét số nghiệm của phương trình $x^n = b$ là chỉ ra sự tồn tại số căn bậc *n* của *b* trong các trường hợp : $b = 0$, $b > 0$, $b < 0$. Từ đó dẫn đến khái niệm căn bậc *n* của số *b* ở mục sau.

Hoạt động 2 yêu cầu học sinh sử dụng đồ thị để biện luận số nghiệm của phương trình $x^n = b$ khi $n = 3$ và $n = 4$.



a) b)

Hình 35

Từ đồ thị (H.35), ta có kết quả sau :

- Với mọi $b \in \mathbb{R}$, phương trình $x^3 = b$ luôn có một nghiệm.
- Với $b < 0$, phương trình $x^4 = b$ không có nghiệm.
- Với $b = 0$, phương trình $x^4 = 0$ có một nghiệm $x = 0$.
- Với $b > 0$, phương trình $x^4 = b$ có hai nghiệm đối nhau.

Khi học chương này, học sinh đã biết cách biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị. Do đó, SGK đưa ra phương án chấp nhận đồ thị của hàm số $y = x^n$ $(n \geq 2)$ khi n lẻ và n chẵn, tương tự như đồ thị của các hàm số $y = x^3$ và $y = x^4$. Từ đó, biện luận số nghiệm của phương trình $x^n = b$ trong hai trường hợp n lẻ và n chẵn.

3. Căn bậc *n*

Bài toán lấy căn được xem như bài toán ngược của tính luỹ thừa với số mũ nguyên dương của một số. SGK chỉ xét căn bậc n với $n \geq 2$ vì thực tế không cần căn bậc 1, mặc dù về mặt lí thuyết có thể xét cả căn bậc 1. Khi đó, ta có căn bậc 1 của a là a.

Cần chú ý rằng khi định nghĩa căn bậc n của một số, ta chưa đưa ra kí hiệu vì còn phải xét điều kiện tồn tại căn bậc n như là nghiệm của phương trình $x^n = b$.

Khi n lẻ, với mọi b, ta đều có một giá trị của căn bậc n của b, kí hiệu là $\sqrt[n]{b}$. Khi n chẵn và $b > 0$, ta có hai giá trị của căn bậc n của b trái dấu nhau nên có hai kí hiệu $\sqrt[n]{b}$ và $-\sqrt[n]{b}$, trong đó $\sqrt[n]{b}$ chỉ giá trị dương và ta cũng có khái niệm căn số học bậc chẵn của b như trường hợp căn bậc 2.

Hoạt động 3 nhằm áp dụng định nghĩa :

Đặt $a_1 = \sqrt[n]{a}$, $b_1 = \sqrt[n]{b}$ thì $a_1^n = a$, $b_1^n = b$ và $a_1b_1 = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$.

Mặt khác, $ab = a_1^n b_1^n = (a_1b_1)^n$.

Xét hai trường hợp :

n lẻ thì $a_1b_1 = \sqrt[n]{ab}$;

n chẵn thì điều kiện để $\sqrt[n]{a}$ và $\sqrt[n]{b}$ có nghĩa là $a \geq 0$, $b \geq 0$, suy ra $a_1 = \sqrt[n]{a} \geq 0$, $b_1 = \sqrt[n]{b} \geq 0$ nên $a_1b_1 = \sqrt[n]{ab}$. Do đó, ta luôn có $a_1b_1 = \sqrt[n]{ab}$.

Vậy $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

4. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ, vô tỉ

Trong lí thuyết số thực ta biết rằng : Mọi số hữu tỉ đều biểu diễn được thành số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn, còn số vô tỉ chỉ biểu diễn được thành số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Người ta cũng chứng minh được mọi số vô tỉ đều là giới hạn của một dãy số hữu tỉ.

Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ đã được định nghĩa nên ta sẽ định nghĩa luỹ thừa với số mũ vô tỉ như là giới hạn của dãy các luỹ thừa với số mũ hữu tỉ.

Rõ ràng việc định nghĩa qua phép toán giới hạn là rất trừu tượng và khó hiểu đối với học sinh. Vì thế, trước khi nêu định nghĩa, SGK xét một dãy số hữu tỉ (r_n) cụ thể, tăng, hội tụ về số vô tỉ $\sqrt{2}$. Bằng cách quan sát bảng các giá trị tương ứng của hai dãy số (r_n) và (3^{r_n}), về mặt trực giác, học sinh sẽ thấy được các dãy số (r_n) và (3^{r_n}) tăng và bị chặn trên nên sẽ có giới hạn mà ta gọi là $\sqrt{2}$ và $3^{\sqrt{2}}$ tương ứng. Sau ví dụ này, SGK mới phát biểu định nghĩa luỹ thừa với số mũ vô tỉ của số thực dương.

II – TÍNH CHẤT CỦA LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

Hoạt động 4 nhằm để học sinh nhớ lại các tính chất của luỹ thừa đã học ở lớp dưới, từ đó nêu các tính chất tương tự cho trường hợp cơ số thực. Mặc dù các tính chất này rất đơn giản nhưng khi áp dụng, học sinh thường nhầm lẫn. Muốn học sinh nắm vững các tính chất, có thể yêu cầu học sinh chứng minh một vài tính chất đơn giản trong trường hợp số mũ nguyên. Chẳng hạn, có thể đưa ra hoạt động sau đây.

Chứng minh rằng nếu $0 < a < b$ và n nguyên âm thì $a^n > b^n$.

Thật vậy : Đặt $k = -n$ thì k nguyên dương.

Vì $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ nên $\left(\dfrac{1}{a}\right)^k > \left(\dfrac{1}{b}\right)^k$ hay $a^{-k} > b^{-k}$.

Vậy $a^n > b^n$.

– Đáp án của hoạt động 5 :

$$\frac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}.a^{4-\sqrt{5}}} = \frac{a^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{a^{\sqrt{5}-3+4-\sqrt{5}}} = \frac{a^2}{a} = a \quad (a > 0).$$

– Đáp án của hoạt động 6 :

So sánh các số mũ $\sqrt{8}$ và 3, ta có $3 = \sqrt{9} > \sqrt{8}$.

Vì cơ số $\dfrac{3}{4}$ bé hơn 1 nên $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\sqrt{8}} > \left(\dfrac{3}{4}\right)^3$.

Ví dụ 7 và hoạt động 6 chuẩn bị cho việc xét tính chất đơn điệu của hàm số mũ ở §3.

C. BÀI TẬP

1. a) 9 ; b) 8 ; c) 40 ;

d) $(0{,}04)^{-1{,}5} - (0{,}125)^{-\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = (5^{-2})^{-\frac{3}{2}} - (2^{-3})^{-\frac{2}{3}}$

$= 5^3 - 2^2 = 121.$

2. a) $a^{\frac{5}{6}}$; b) b ; c) a ; d) $b^{\frac{1}{6}}$.

3. a) 2^{-1} ; $1^{3,75}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; b) 98^0 ; $32^{\frac{1}{5}}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$.

4. a) a ; b) $1, (b \neq 1)$;

c) $\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{ab}}$ $(a \neq b)$;

d) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{1}{6}})}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} = \sqrt[3]{ab}$.

5. a) Ta có $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$, $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ nên $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$. Vì $\frac{1}{3} < 1$ nên có bất đẳng thức cần chứng minh.

b) Tương tự, $6\sqrt{3} = \sqrt{108} > \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$; $7 > 1$ nên $7^{6\sqrt{3}} > 7^{3\sqrt{6}}$.