§1 NGUYÊN HÀM

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

1. Hiểu định nghĩa nguyên hàm của hàm số trên K. Phân biệt rõ một nguyên hàm với họ nguyên hàm của một hàm số.

2. Vận dụng bảng nguyên hàm vào các bài toán cụ thể.

3. Vận dụng được các tính chất, phép toán và các phương pháp tính nguyên hàm.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

I – NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1. Nguyên hàm

Hoạt động 1 gợi ý cho học sinh thấy rằng từ bảng đạo hàm, nếu biết đạo hàm của một hàm số, ta có thể suy ngược lại được hàm số "gốc" của đạo hàm ấy. Từ đó dẫn đến việc phát biểu định nghĩa khái niệm nguyên hàm.

Ở đây, ta đưa ra định nghĩa nguyên hàm trên K (K có thể là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của $\mathbb{R}$).

Nếu $K = (a\ ;\ b)$ thì định nghĩa nguyên hàm trùng với định nghĩa thông thường trước đây, tức là : Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, $x \in (a\ ;\ b)$ nếu

$$F'(x) = f(x),\ x \in (a\ ;\ b).$$

Nếu $K = [a\ ;\ b]$ thì tại hai mút $x = a$ và $x = b$, ta chỉ đòi hỏi điều kiện

$$F'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a)$$

và

$$F'(b^-) = \lim_{x \to b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b).$$

(Ngoài ra, $F'(x) = f(x)$, $x \in (a\ ;\ b)$).

Giáo viên cần biết điều này, không yêu cầu học sinh phải biết.

Định nghĩa nguyên hàm không mang tính chất kiến thiết như định nghĩa đạo hàm. Giáo viên cần đưa ra nhiều ví dụ đơn giản (chỉ nhờ bảng đạo hàm) giúp học sinh nhanh chóng làm quen với nguyên hàm.

Định lí 1 và Định lí 2 chỉ rõ hai chiều suy luận sau :

– Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi hàm số $G(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ đều là nguyên hàm của $f(x)$ trên K, tức là có vô số nguyên hàm của $f(x)$ (hoạt động 2 minh hoạ điều đó).

– Ngược lại, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K, thì họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, tức là $F(x) + C$

là dạng tổng quát của nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Kí hiệu họ nguyên hàm của $f(x)$ là

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Họ nguyên hàm của $f(x)$ còn được gọi là *tích phân không xác định* của $f(x)$ trên K.

Biểu thức $f(x)\mathrm{d}x$ chính là vi phân của $\int f(x)\mathrm{d}x$ vì $\mathrm{d}\left(F(x) + C\right) = f(x)\mathrm{d}x$.

Đáp án Hoạt động $_3$: Theo định nghĩa của nguyên hàm, ta có

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x), x \in K.$$

Đó là điều phải chứng minh.

2. Tính chất của nguyên hàm

Ở đây chỉ nêu các tính chất đơn giản và cơ bản của nguyên hàm.

Tính chất 1 nói lên mối quan hệ giữa nguyên hàm và đạo hàm khi thực hiện liên tiếp nhau.

- $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$ vì $\left(f(x) + C\right)' = f'(x)$

cho thấy phép tính đạo hàm tiến hành trước phép tính nguyên hàm thì nhận được hàm số ban đầu (đã cho) sai khác một hằng số cộng (hai hàm số có đạo hàm bằng nhau sẽ sai khác nhau một hằng số cộng).

Tính chất 2 nhấn mạnh đến hằng số $k \neq 0$. Vì nếu $k = 0$ nói chung tính chất đó không đúng. Xét ví dụ sau đây.

$$\int (0.\cos x)\mathrm{d}x = \int 0\mathrm{d}x = C \text{ (vô số)},$$

còn $$0\cdot\left(\int \cos x\mathrm{d}x\right) = 0\cdot\left(\sin x + C\right) = 0 \text{ (chỉ một)}.$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $C = 0$.

Tính chất 3

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right) \mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x.$$

Đáp án Hoạt động $_4$: Từ định nghĩa nguyên hàm ta có

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x\right)' = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' + \left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x) + g(x).$$

Tương tự

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x) - g(x).$$

Vậy Tính chất 3 được chứng minh.

Khi thực hành tính $\int f(x)\mathrm{d}x$ và $\int g(x)\mathrm{d}x$ sẽ xuất hiện hai hằng số C_1 và C_2 tuỳ ý, nên $C_1 + C_2$ hoặc $C_1 - C_2$ cũng là hằng số tuỳ ý. Do đó, ta đặt $C = C_1 + C_2$ hoặc $C = C_1 - C_2$ và cộng thêm C sau khi tìm được một nguyên hàm của $f(x) + g(x)$ hoặc $f(x) - g(x)$.

3. Sự tồn tại nguyên hàm

Việc khẳng định một hàm số $f(x)$ khi nào có nguyên hàm là vấn đề quan trọng. Ở đây, ta thừa nhận Định lí 3 và chỉ xét những hàm số thoả mãn điều kiện của Định lí 3. Chẳng hạn :

Hàm số luỹ thừa x^α, $\alpha \neq -1$, $x \in (0\ ;+\infty)$ liên tục và có nguyên hàm

$$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \text{ (ở Ví dụ 5a), } \alpha = \frac{2}{3}).$$

Trường hợp $\alpha = -1$, $x \in (0\ ;+\infty)$, ta có

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C.$$

Hàm số $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ xác định, liên tục trên mỗi khoảng $(k\pi\ ;(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ và có nguyên hàm là

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C.$$

4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

Trước khi lập bảng nguyên hàm các hàm số sơ cấp quen thuộc, ta xét hoạt động $_5$. Hoạt động này nhằm giúp người học nhớ lại bảng đạo hàm : từ đạo hàm suy ngược ra nguyên hàm. Có thể các nguyên hàm viết sai khác nhau một hằng số cộng (chẳng hạn $f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x + C$).

Cần vận dụng linh hoạt bảng nguyên hàm trong khi làm toán (có thể sử dụng bảng nguyên hàm khi hàm sơ cấp cho ở dạng hàm số hợp. Chẳng hạn

$$\int u^{\alpha}(x)u'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(x) + C \ ; \int \frac{u'(x)}{u(x)}\mathrm{d}x = \ln|u(x)| + C).$$

Phần này cũng cần được luyện tập. Giáo viên cần ghi ra một số dạng nguyên hàm loại này rồi yêu cầu học sinh trả lời.

II – PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Trước hết, ta xét hai ví dụ sau đây.

a) Xét nguyên hàm (trong $_{6}$)

$$\int (x-1)^{10}\mathrm{d}x.$$

Hãy viết $(x-1)^{10}\,\mathrm{d}x$ theo biến mới u với $u = x - 1$ và $\mathrm{d}u$.

Ta có $u' = 1$, $(x-1)^{10} = u^{10}$. Do đó

$$(x-1)^{10}\mathrm{d}x \text{ chuyển thành } u^{10}\mathrm{d}u.$$

b) Xét $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$. Đặt $x = \mathrm{e}^t$, ta có $x' = \mathrm{e}^t$. Biểu thức $\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ được viết thành $\frac{t}{\mathrm{e}^t}.\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = t\mathrm{d}t$.

Nhờ cách đổi biến số $u = x - 1$ và $x = \mathrm{e}^t$, mà hai biểu thức dưới dấu nguyên hàm đã cho chuyển thành hai biểu thức theo biến mới có dạng trong bảng nguyên hàm và như thế sẽ tính được dễ dàng nguyên hàm này (theo biến mới).

Vấn đề đặt ra là với phép đổi biến số trên thì có hay không đẳng thức

$$\int (x-1)^{10}\mathrm{d}x = \int u^{10}\mathrm{d}u \text{ với } u = x - 1$$

và

$$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int t\mathrm{d}t \text{ với } x = \mathrm{e}^t.$$

Định lí 1 trong SGK cho ta câu trả lời : Nếu $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục và hàm số $f(u)$ có nguyên hàm là $F(u)$ thì $F(u(x))$ là một nguyên hàm của hàm số $f(u(x))\,u'(x)$.

Ví dụ 1. Tính $\int \tan x\mathrm{d}x$ (đặt $u = \cos x$)

Giải. Vì $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ và $u' = -\sin x$, ta có $\tan x\mathrm{d}x$ được viết thành $-\dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u$.

Khi đó $\quad -\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + C$. Thay $u = \cos x$, ta được

$$\int \tan x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Ví dụ 2. Tính $\int (1-x)^{10}\mathrm{d}x$.

Giải. Đặt $u = 1 - x$, ta có $u' = -1$, $(1-x)^{10} = u^{10}$.

Do đó, nguyên hàm đang xét được viết thành

$$-\int u^{10}\mathrm{d}u = -\frac{1}{11}u^{11} + C.$$

Trở về biến số x (đây là điều bắt buộc) bằng cách thay u bởi $1 - x$ vào nguyên hàm tìm được, ta có

$$\int (1-x)^{10}\mathrm{d}x = -\frac{1}{11}(1-x)^{11} + C.$$

Trên cơ sở của phương pháp đổi biến số, ta lập được bảng nguyên hàm nếu hàm sơ cấp trong bảng cho ở dạng hàm số hợp $f(u)$ với $u = u(x)$.

$\int u'(x)\mathrm{d}x = u(x) + C$	$\int \cos u(x).u'(x)\mathrm{d}x = \sin u(x) + C$
$\int (u(x))^{\alpha} u'(x)\mathrm{d}x = \dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$	$\int \sin u(x)u'(x)\mathrm{d}x = -\cos u(x) + C$
$\int \dfrac{u'(x)}{u(x)}\mathrm{d}x = \ln\lvert u(x)\rvert + C \quad (u(x) \neq 0)$	$\int \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}\mathrm{d}x = \tan u(x) + C$
$\int \mathrm{e}^{u(x)}.u'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{u(x)} + C$	$\int \dfrac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}\mathrm{d}x = -\cot u(x) + C$
$\int a^{u(x)}.u'(x)\mathrm{d}x = \dfrac{a^{u(x)}}{\ln a} + C$ $(a > 0,\ a \neq 1)$	

Có thể xét thêm một số bài toán dạng này để học sinh làm quen.

2. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Hoạt động 7 nhằm gợi ý đi đến công thức tính nguyên hàm từng phần.

Từ $\quad (x\cos x)' = \cos x - x\sin x, \qquad (*)$

ta có

$$\int x\sin x\mathrm{d}x = -\int (x\cos x)'\mathrm{d}x + \int \cos x\mathrm{d}x. \qquad (**)$$

Vì $\quad \int (x\cos x)'\mathrm{d}x = x\cos x + C_1\ ;\ \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C_2,$

nên $\quad \int x\sin x\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C\ (C = -C_1 + C_2).$

Nhận xét. Từ đẳng thức (*) cho thấy rằng nếu xem $u = x$ và $v = \cos x$, thì $(x\cos x)'\mathrm{d}x = (uv)'\mathrm{d}x = \mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$. Khi đó

$$\int x\sin x\mathrm{d}x \text{ có dạng } \int u.v'\mathrm{d}x \text{ hay } \int u\mathrm{d}v,$$

và $\quad \int \cos x\mathrm{d}x$ có dạng $\int u'v\mathrm{d}x$ hay $\int v\mathrm{d}u.$

Đẳng thức (**) có dạng

$$\int u\mathrm{d}v = \int \mathrm{d}(uv) - \int v\mathrm{d}u. \qquad (***)$$

Ở (***), ta có ngay

$$\int \mathrm{d}(uv) = \int (uv)'\mathrm{d}x = uv + C.$$

Các nguyên hàm $\int u\mathrm{d}v$ và $\int v\mathrm{d}u$ có dạng giống nhau. Mục đích của ta là nhờ (***) để tính được một nguyên hàm (trong ba nguyên hàm) và nói chung $\int v\mathrm{d}u$ phải có dạng đơn giản hơn $\int u\mathrm{d}v$, thậm chí có thể cũng tính ngay được. Bởi vậy, ta gọi đó là phương pháp tính nguyên hàm từng phần.

Từ nhận xét trên, việc phát biểu và chứng minh Định lí có phần nào tự nhiên hơn. Do đó, học sinh dễ tiếp nhận hơn.

Có thể gặp trường hợp phải áp dụng lặp lại việc tính nguyên hàm từng phần một số lần. Chẳng hạn, xét

$$\int x^2\cos x\mathrm{d}x.$$

Đặt $u = x^2$ và $\mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x$, ta được $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$ và $v = \sin x$.

Do đó $\int x^2\cos x\mathrm{d}x = x^2\sin x - 2\int x\sin x\mathrm{d}x$.

(Rõ ràng $\int x\sin x\mathrm{d}x$ đơn giản hơn $\int x^2\cos x\mathrm{d}x$).

Lại sử dụng phép tính nguyên hàm từng phần đối với $\int x\sin x\mathrm{d}x$, ta được (với $u = x$, $\mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x$)

$$\int x\sin x\mathrm{d}x = -x\cos x + \int\cos x\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C.$$

Vậy

$$\int x^2\cos x\mathrm{d}x = x^2\sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + C$$

hay

$$\int x^2\cos x\mathrm{d}x = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

Đáp án Hoạt động 8 :

	$\int P(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$	$\int P(x)\cos x\mathrm{d}x$	$\int P(x)\ln x\mathrm{d}x$
u	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
$\mathrm{d}v$	$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$	$\cos x\mathrm{d}x$	$P(x)\mathrm{d}x$

Trong thực tế, việc vận dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần phải linh hoạt. Đôi khi phải có dự đoán khác thường.

Ví dụ 1. Xét $\int x^2(1-x)^4\mathrm{d}x$.

Giải. Đặt $u = x^2$, $\mathrm{d}v = (1-x)^4\,\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$, $v = -\frac{1}{5}(1-x)^5$.

Do đó $\quad \int x^2(1-x)^4\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{5}(1-x)^5 + \frac{2}{5}\int x(1-x)^5\mathrm{d}x.$

Lại tính tiếp nguyên hàm từng phần đối với $\int x(1-x)^5\mathrm{d}x$, ta được (với $u = x$, $\mathrm{d}v = (1-x)^5\mathrm{d}x$) :

$$\int x(1-x)^5\mathrm{d}x = -\frac{x}{6}(1-x)^6 + \frac{1}{6}\int(1-x)^6\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x}{6}(1-x)^6 - \frac{1}{42}(1-x)^7 + C.$$

Vậy

$$\int x^2(1-x)^4\,dx = -\frac{x^2}{5}(1-x)^5 - \frac{x}{15}(1-x)^6 - \frac{1}{105}(1-x)^7 + C.$$

Ví dụ 2. Xét $\int\left(1+x+\frac{1}{x}\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx$.

Giải. Ta có

$$\int\left(1+x+\frac{1}{x}\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx = \int e^{x-\frac{1}{x}}dx + \int\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx.$$

Đối với $\int e^{x-\frac{1}{x}}dx$, áp dụng tính nguyên hàm từng phần với $u = e^{x-\frac{1}{x}}$ và $dv = dx$, ta có

$$du = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx,\ v = x.$$

Do đó

$$\int e^{x-\frac{1}{x}}\,dx = xe^{x-\frac{1}{x}} - \int\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx.$$

Vậy

$$\begin{aligned}\int\left(1+x+\frac{1}{x}\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx &= xe^{x-\frac{1}{x}} - \int\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx + \int\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx \\ &= xe^{x-\frac{1}{x}} + C.\end{aligned}$$

C. BÀI TẬP

1. a) e^{-x} và $-e^{-x}$ là nguyên hàm của nhau.

b) $\sin^2 x$ là một nguyên hàm của $\sin 2x$.

c) $\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x$ là một nguyên hàm của $\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x$, vì $\left(\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x\right)' = \frac{4}{x^2}e^x + \left(1-\frac{4}{x}\right)e^x = \left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)e^x = \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x$.

2. a) $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$; b) $\frac{2^x + \ln 2 - 1}{e^x(\ln 2 - 1)} + C$; c) $-2\cot 2x + C$.

$\left(\text{vì } \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x}, \text{ hoặc } \frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)$;

d) $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\cos 8x + \cos 2x\right) + C$;

HD : $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x)$;

e) $\tan x - x + C$; *HD* : $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

g) $-\frac{1}{2}e^{3-2x} + C$;

h) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+x}{1-2x}\right| + C$. *HD* : $\frac{1}{(1+x)(1-2x)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x}\right)$.

3. a) $-\frac{(1-x)^{10}}{10} + C$; b) $\frac{1}{5}\left(1+x^2\right)^{\frac{5}{2}} + C$;

c) $-\frac{1}{4}\cos^4 x + C$; d) $\frac{-1}{1+e^x} + C$.

4. a) $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{2} + C$. *HD*. Áp dụng tính nguyên hàm từng phần : $u = \ln(1+x)$, $dv = x dx$.

b) $e^x(x^2 - 1) + C$. *HD* : Áp dụng tính nguyên hàm từng phần hai lần : $u = x^2 + 2x - 1$, $dv = e^x dx$, hoặc tính $\int (x^2 - 1)e^x dx$ với $u = x^2 - 1$ và $dv = e^x dx$.

c) $-\frac{x}{2}\cos(2x+1) + \frac{1}{4}\sin(2x+1) + C$. *HD* : $u = x$, $dv = \sin(2x+1)dx$.

d) $(1-x)\sin x - \cos x + C$. *HD* : $u = 1 - x$, $dv = \cos x dx$.

D. KIẾN THỨC BỔ SUNG

Trong phần phương pháp tính nguyên hàm, hai phương pháp quan trọng thông dụng là phương pháp đổi biến số và phương pháp tính nguyên hàm từng phần với các ví dụ ở dạng đơn giản. Dưới đây, chúng ta trình bày sâu hơn có tính kĩ thuật về vấn đề này để giáo viên và học sinh tham khảo.

Một số kĩ thuật trong việc tính nguyên hàm

Ta giới thiệu một số nguyên hàm thường gặp.

a) Nguyên hàm của hàm số hữu tỉ (hay phân thức hữu tỉ)

Xét nguyên hàm dạng

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x,$$

trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức của x.

Nếu bậc của $P(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x)$ thì $\frac{P(x)}{Q(x)}$ là phân thức thực sự.

Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn hoặc bằng bậc của $Q(x)$ thì $\frac{P(x)}{Q(x)}$ chưa là phân thức thực sự. Do đó nhờ chia đa thức, ta được

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

trong đó $p(x)$ là đa thức của x còn $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ là phân thức thực sự.

Ta chỉ quan tâm tính $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$ với $\frac{P(x)}{Q(x)}$ là phân thức thực sự

(vì $\int p(x)\mathrm{d}x$ đã biết cách tính).

Trong Đại số, ta đã biết phân tích $\frac{P(x)}{Q(x)}$ thành tổng của các phân thức đơn giản (bằng phương pháp hệ số bất định) như :

$$\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^k}, \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \text{ và } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$$

$$(k \geq 2,\ m \geq 2,\ p^2 - 4q < 0).$$

Do đó, việc tính $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$ được đưa về tính các dạng nguyên hàm sau :

(i) $\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C.$

(ii) $\int \frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$

(iii) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$, nhờ đặt $t = x + \frac{p}{2}$ và $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, ta được

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\int \frac{2t\mathrm{d}t}{a^2+t^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}.$$

Do đó

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

(iv) Với cách đổi biến như (iii), ta được

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\int \frac{2t\mathrm{d}t}{(a^2+t^2)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{(a^2+t^2)^m}.$$

Khi đó

$$\int \frac{2t\mathrm{d}t}{(a^2+t^2)^m} = -\frac{1}{m-1}\frac{1}{(a^2+t^2)^{m-1}} + C$$

và

$$\mathrm{I}_m = \int \frac{\mathrm{d}t}{(a^2+t^2)^m}$$

được tính nhờ công thức truy hồi sau :

$$I_m = \frac{t}{2(m-1)a^2(a^2+t^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)a^2}I_{m-1}\,(m \geq 2)$$

với $\quad I_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + C$

và

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}t}{(a^2+t^2)^2} = \frac{t}{2a^2(a^2+t^2)} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{t}{a} + C.$$

((iii) và (iv) đưa ra để biết vì ngoài chương trình).

Ví dụ 1. Tính

$$\int \frac{x-1}{x(x+1)^2} \mathrm{d}x.$$

Giải. Nhờ phân tích

$$\frac{x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2},$$

ta tìm được $A = -1$, $B = 1$ và $C = 2$.

Do đó

$$\int \frac{x-1}{x(x+1)^2} \mathrm{d}x = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right) \mathrm{d}x$$

$$= -\ln|x| + \ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + C$$

hay

$$\int \frac{x-1}{x(x+1)^2} \mathrm{d}x = \ln \frac{|x+1|}{|x|} - \frac{2}{x+1} + C.$$

b) *Nguyên hàm của hàm số vô tỉ*. Xét nguyên hàm dạng

$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) \mathrm{d}x$, với $ad - bc \neq 0$ và R là hàm số hữu tỉ của hai biến.

Đặt $\quad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, ta được

$$x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a} = \varphi(t) \text{ là hàm số hữu tỉ của } t.$$

Khi đó

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) \mathrm{d}x = \int R(\varphi(t), t)\, \varphi'(t) \mathrm{d}t.$$

Nguyên hàm trên đây có dạng nguyên hàm của hàm số hữu tỉ.

Ví dụ 2. Tính $\int\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} \Rightarrow x=\dfrac{t^2+1}{1-t^2},\ \mathrm{d}x=\dfrac{4t}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t$. Ta có

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\mathrm{d}x &= 4\int\frac{t^2}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t\\ &= \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{(1-t)^2}\right)\mathrm{d}t\\ &= \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|-\frac{2t}{t^2-1}+C,\end{aligned}$$

trong đó $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Xét nguyên hàm dạng

$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x, (a\neq 0)$, R là hàm số hữu tỉ của hai biến.

+ Nếu $a>0$, ta đặt

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(t-x)\sqrt{a} \Rightarrow x=\frac{at^2-c}{2at+b}=\varphi(t).$$

+ Nếu $c>0$, ta đặt

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c} \Rightarrow x=\frac{b-2\sqrt{c}t}{t^2-a}=\varphi(t).$$

Ví dụ 3. Tính

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}, (a>0).$$

Giải. Đặt

$$\sqrt{x^2+a^2}=t-x \Rightarrow x=\frac{t^2-a^2}{2t},\ \mathrm{d}x=\frac{t^2+a^2}{2t^2}\mathrm{d}t.$$

Khi đó

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|+C,$$

hay $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$$

c) *Nguyên hàm của hàm số lượng giác*. Xét nguyên hàm dạng

$\int R(\sin x, \cos x)dx$, với R là hàm số hữu tỉ của $\sin x$ và $\cos x$.

(i) Trường hợp chung, đặt $t = \tan\frac{x}{2}$.

Khi đó, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ và $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Do đó

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right).\frac{2}{1+t^2}dt,$$

trong đó vế phải là nguyên hàm của hàm số hữu tỉ đã biết.

Ví dụ 4. Tính $\int \frac{1}{\sin x}dx$.

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, ta được

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}.\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C.$$

Trở lại biến cũ x, ta có

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

(ii) Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \sin x$.

Khi đó, $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ chỉ là hàm số của $\sin x$ (với $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$).

Đặt $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x} = R^*(\sin x)$ là hàm số hữu tỉ của $\sin x$.

Vậy

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R^*(\sin x)d\sin x = \int R^*(t)dt,$$

với $t = \sin x$.

Ví dụ 5. Tính $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sin x$, ta được

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cos x\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

Vậy $$\int \frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} - \int \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - t + C$$

hay

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| - \sin x + C.$$

Trường hợp $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, ta đặt $t = \cos x$.

Trường hợp $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, ta đặt $t = \tan x$.

Ví dụ 6. Tính $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x}$.

Đặt $t = \tan x$, ta được $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\tan x.\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C$,

hay $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x} = \ln|\tan x| + C.$$

Chú ý. Có thể viết $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}2x}{\sin 2x} = \ln|\tan x| + C$ (xem Ví dụ 4).