§1 SỐ PHỨC

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

Học sinh hiểu các khái niệm số phức, phần thực, phần ảo của một số phức, biết biểu diễn một số phức trên mặt phẳng toạ độ, hiểu ý nghĩa hình học của khái niệm môđun và số phức liên hợp.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

1. Số *i*

Việc xây dựng tập hợp số phức được đặt ra từ vấn đề mở rộng tập hợp số thực sao cho mọi phương trình đa thức đều có nghiệm. Để giải quyết vấn đề này, ta bổ sung vào tập số thực $\mathbb{R}$ một số mới, kí hiệu là i và coi nó là một nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$. Như vậy, $i^2 + 1 = 0$ hay $i^2 = -1$.

2. Định nghĩa

Trong mục này, ta nêu đồng thời định nghĩa các khái niệm số phức, phần thực, phần ảo của số phức và nêu kí hiệu tập hợp số phức.

Cách đưa ra khái niệm số phức $a + bi$ ở đây chỉ có ý nghĩa mô tả. Các kí hiệu +, bi, i^2 trong định nghĩa này chưa có nội dung gì, nhưng ta có thể để học sinh hiểu các kí hiệu đó theo nghĩa thông thường của chúng.

Lưu ý rằng $a + bi$ là dạng đại số của số phức. Ngoài cách viết trên, ta còn viết một số phức dưới dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Hoạt động $_1$ nhằm củng cố các khái niệm phần thực, phần ảo của số phức.

3. Số phức bằng nhau

• Quan hệ bằng nhau giữa hai số phức là quan hệ đồng nhất

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ và } b = d.$$

Ví dụ 2 nhằm củng cố khái niệm vừa nêu, đồng thời là một mẫu bài tập đối với học sinh.

Từ sự bằng nhau của hai số phức, suy ra mỗi số phức hoàn toàn được xác định bởi một cặp số thực. Điều đó là cơ sở cho việc biểu diễn hình học số phức.

• Mỗi số thực a được đồng nhất với số phức $a + 0i$. Vậy mỗi số thực cũng là một số phức. Do đó, tập số thực $\mathbb{R}$ là một tập con của tập các số phức $\mathbb{C}$.

• Số thuần ảo là những số dạng $0 + bi$ và được viết đơn giản là bi.

Giáo viên nên nhấn mạnh các đồng nhất thức sau :

$$a = a + 0i \text{ (đặc biệt, } 0 = 0 + 0i,\ 1 = 1 + 0i),$$

$$bi = 0 + bi,$$

$$i = 0 + 1i.$$

Hoạt động $_2$ là bài toán ngược của bài toán tìm phần thực và phần ảo của một số phức.

4. Biểu diễn hình học số phức

Điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$ trên mặt phẳng toạ độ là điểm $M(a\ ;\ b)$.

Hoạt động $_3$ nhằm rèn kĩ năng biểu diễn số phức trên mặt phẳng toạ độ. Các điểm biểu diễn số thực đều có tung độ bằng 0, do đó nằm trên trục Ox. Các điểm biểu diễn số thuần ảo đều có hoành độ bằng 0, do đó nằm trên trục Oy.

Chẳng hạn, giáo viên có thể củng cố cho học sinh bằng bài toán ngược : "Điểm $M(-3\ ;\ \sqrt{2})$ biểu diễn số phức nào ?".

5. Môđun của số phức

Khái niệm môđun của một số phức được định nghĩa nhờ biểu diễn hình học của nó : Nếu số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm M trên mặt phẳng toạ độ thì độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của z. Giáo viên nên hướng dẫn để học sinh tự tìm ra công thức

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

bằng gợi ý : "Sử dụng hệ thức Py-ta-go trong tam giác vuông để tìm công thức liên hệ giữa môđun của một số phức với phần thực và phần ảo của nó".

Hoạt động $_4$ có thể thực hiện bằng hai cách như sau :

- $\left|\overrightarrow{OM}\right| = 0 \Leftrightarrow M \equiv O$. Điểm biểu diễn số phức z trùng với gốc toạ độ O khi và chỉ khi $z = 0$.
- $\sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$. Vậy số phức có môđun bằng 0 là số 0.

6. Số phức liên hợp

Hoạt động $_5$ nhằm để học sinh tự nhận xét về tính chất của các điểm biểu diễn hai số phức có phần thực bằng nhau và phần ảo đối nhau : chúng đối xứng nhau qua trục Ox. Từ đó nêu lên định nghĩa số phức liên hợp.

Sau khi đã nêu định nghĩa số phức liên hợp, nên cho học sinh nhận xét về phần thực và phần ảo của hai số phức liên hợp.

Hoạt động $_6$ nhằm để học sinh tự thấy các tính chất $\overline{\overline{z}} = z$ và $|z| = |\overline{z}|$ qua một ví dụ cụ thể. Với các học sinh khá và giỏi nên yêu cầu chứng minh tính chất này một cách tổng quát.

Nên yêu cầu học sinh phát biểu thành lời hai tính chất trên : liên hợp của liên hợp của số phức z là chính nó, hai số phức liên hợp có môđun bằng nhau.

C. BÀI TẬP

1. Phần thực và phần ảo của số phức z lần lượt là :

a) $1, -\pi$; b) $\sqrt{2}, -1$; c) $2\sqrt{2}, 0$; d) $0, -7$.

2. Từ định nghĩa bằng nhau của hai số phức, ta có

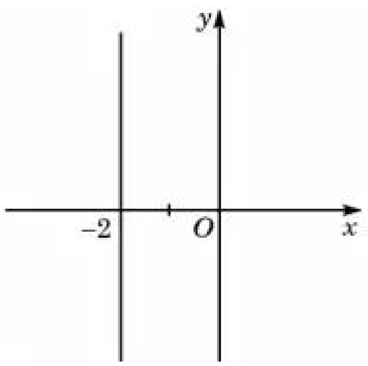
a) $\begin{cases} 3x - 2 = x + 1 \\ 2y + 1 = -(y - 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{4}{3} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 1 - 2x = \sqrt{5} \\ 1 - 3y = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{3} \end{cases}$;

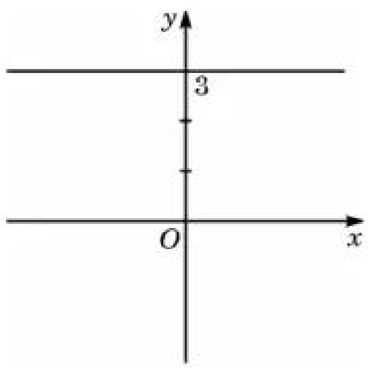
c) $\begin{cases} 2x + y = x - 2y + 3 \\ 2y - x = y + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 3 \\ -3x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$

3. Các điểm biểu diễn số phức z được xác định trên các hình từ 57 đến 61 :

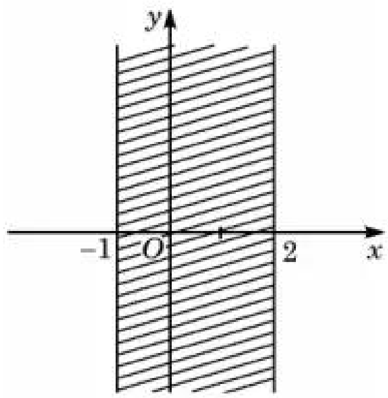
a) (H.57). b) (H.58). c)(H.59).



Hình 57

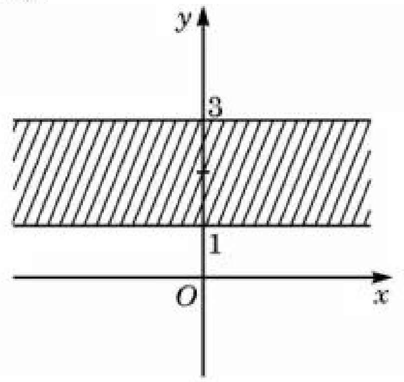


Hình 58



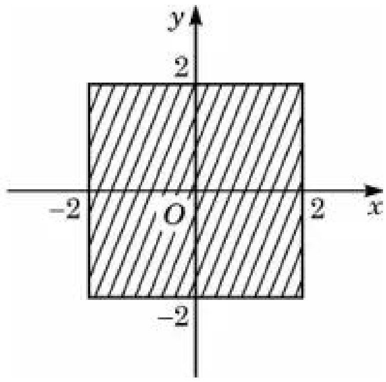
Hình 59

d) (H.60).



Hình 60

e) (H.61).



Hình 61

4. a) $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$;

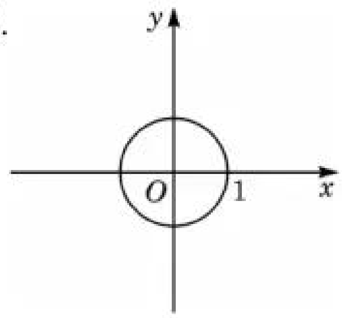
b) $|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-3)^2} = \sqrt{11}$;

c) $|z| = \sqrt{(-5)^2} = 5$;

d) $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$.

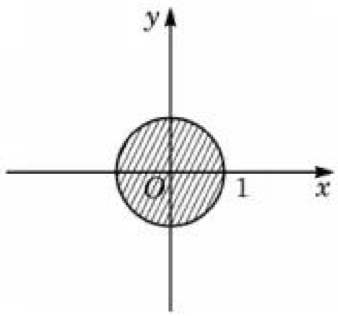
5. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z được xác định trên các hình sau :

a) (H.62).



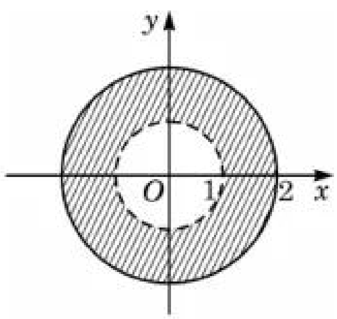
Hình 62

b) (H.63).



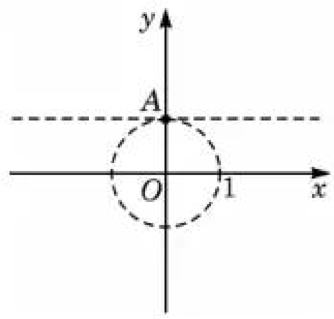
Hình 63

c) (H.64).



Hình 64

d) (H.65).



Hình 65

6. a) $\overline{z} = 1 + i\sqrt{2}$;

b) $\overline{z} = -\sqrt{2} - i\sqrt{3}$;

c) $\overline{z} = 5$;

d) $\overline{z} = -7i$.