§ 1 SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

1. Hiểu định nghĩa sự đồng biến, nghịch biến của hàm số và mối liên hệ giữa khái niệm này với đạo hàm.

2. Biết vận dụng quy tắc xét tính đơn điệu của một hàm số và dấu đạo hàm của nó.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

1. Mặc dù khái niệm đồng biến, nghịch biến của hàm số đã được học ở Đại số 10 nhưng ở đây vẫn cần nhắc lại và cần cho học sinh thấy mối liên hệ giữa tính đơn điệu và dấu của đạo hàm. Từ đó dễ dàng đoán nhận được dấu hiệu sau :

Trên khoảng $(a\ ;\ b)$

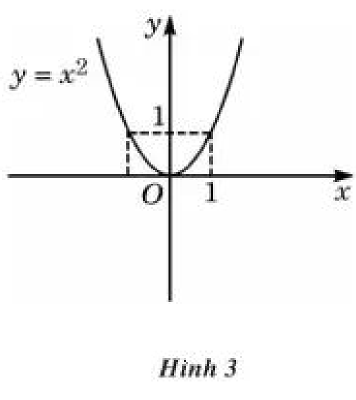
$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến,

$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến.

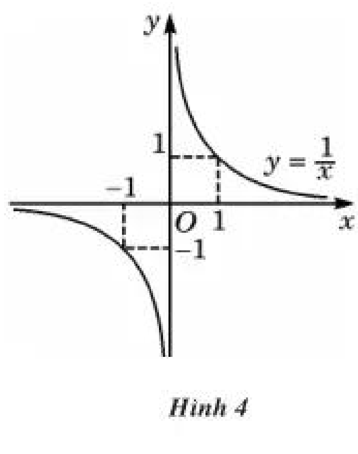
2. Nên tích cực sử dụng hình ảnh hình học (đồ thị) của một hàm số để gợi ý, củng cố các kiến thức mang tính lí thuyết. Tuỳ đối tượng học sinh, có thể thay thế các hoạt động ( ) trong SGK bằng những hoạt động tương tự.

Chẳng hạn, có thể thay $_1$ bằng hoạt động sau :

$'_1$. Từ các đồ thị ở Hình 3 và Hình 4 hãy chỉ ra các khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số tương ứng :



Hình 3



Hình 4

Đáp án hoạt động $_2$:

a) $y' = -x$ suy ra : $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty\,;0)$;

$y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0\,;+\infty)$.

b) $y' = -\dfrac{1}{x^2}$ suy ra $y' < 0$, $\forall x \neq 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty\,;0)$ và $(0\,;+\infty)$.

Từ những ví dụ trên, ta đoán nhận :

Nếu $y' > 0$ trên khoảng $(a\,;b)$ thì hàm số đồng biến trên $(a\,;b)$;

Nếu $y' < 0$ trên khoảng $(a\,;b)$ thì hàm số nghịch biến trên $(a\,;b)$.

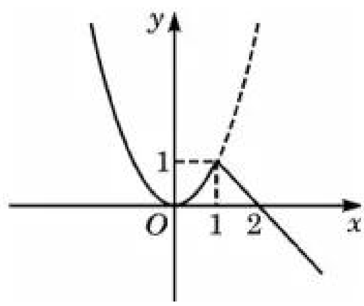
3. Hoạt động $_3$ nhằm nhắc học sinh rằng, nếu không bổ sung giả thiết thì mệnh đề ngược lại sau không đúng :

$$f(x) \text{ đồng biến trên } K \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ trên } K,$$

$$f(x) \text{ nghịch biến trên } K \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ trên } K.$$

Chẳng hạn, hàm số $y = x^3 + 1$.

4. Để giúp học sinh dễ nhớ quy trình xét tính đơn điệu bằng đạo hàm, SGK nêu các bước tiến hành dưới dạng một quy tắc. Trong quy tắc này, nếu học sinh yêu cầu cho một ví dụ minh hoạ rằng ngoài các nghiệm của $f'(x) = 0$ còn cần tìm cả những điểm tại đó đạo hàm không xác định (tức là không có đạo hàm tại đó), ta có thể lấy các ví dụ sau :



Hình 5

a) (H.5).

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \le 1 \\ -x + 2 & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$ vì :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{-(1 + \Delta x) + 2 - 1}{\Delta x} = -1,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = 2.$$

Mặt khác, $f'(x) = 2x$ với $-\infty < x < 1$ nên

$f'(x) > 0$ khi $0 < x < 1$;

$f'(x) < 0$ khi $-\infty < x < 0$;

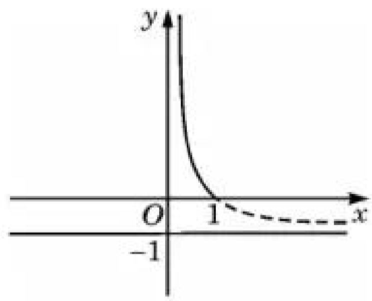
$f'(x) = -1$ khi $1 < x < +\infty$.

Suy ra sự biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

b) Xét hàm số (H.6)

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{x} & \text{với } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{với } x > 1. \end{cases}$$



Hình 6

Hàm số $g(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$ vì

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{g(1+\Delta x) - g(1)}{\Delta x} = 0,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{g(1+\Delta x) - g(1)}{\Delta x} = -1.$$

Mặt khác

$g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ trong khoảng $(0\,;1)$ và $g'(x) = 0$ khi $x > 1$.

Suy ra $g(x)$ giảm trong khoảng $(0;1)$, $g(x)$ không đổi trong khoảng $(1\,;+\infty)$.

C. BÀI TẬP

1. a) $y = 4 + 3x - x^2$. Tập xác định của hàm số : $\mathbb{R}$;

$y' = 3 - 2x,\ \ y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

x	$-\infty$		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
y'		+	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$\dfrac{25}{4}$	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ +\infty\right)$.

b) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x - 2$. Tập xác định của hàm số : $\mathbb{R}$;

$y' = x^2 + 6x - 7$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -7. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-7		1		$+\infty$
y'		+	0	$-$	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\dfrac{239}{3}$	↘	$-\dfrac{17}{3}$	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty\ ;\ -7)$, $(1\ ;\ +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-7\ ;\ 1)$.

c) $y = x^4 - 2x^2 + 3 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1),\ \ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	0	+	
y	$+\infty$	↘	2	↗	3	↘	2	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1\,;0),(1\,;+\infty)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\,;-1),(0\,;1)$.

d) $y=-x^3+x^2-5 \Rightarrow y'=-3x^2+2x=x(-3x+2)$,

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{2}{3}. \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$-\frac{131}{27}$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0\,;\frac{2}{3}\right)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\,;0),\left(\frac{2}{3}\,;+\infty\right)$.

2. a) $y=\dfrac{3x+1}{1-x} \Rightarrow y'=\dfrac{4}{(1-x)^2}$, $\forall x \neq 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	-3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-3

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty\,;1),(1\,;+\infty)$.

b) $y=\dfrac{x^2-2x}{1-x} \Rightarrow y'=\dfrac{-x^2+2x-2}{(1-x)^2}$.

Vì $y'<0$ với mọi $x \neq 1$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\,;1),(1\,;+\infty)$.

c) $y=\sqrt{x^2-x-20}$. Tập xác định : $(-\infty\,;-4]\cup[5\,;+\infty)$.

$y'=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-20}}$; Khi $x\in(-\infty\,;-4)$ thì $y'<0$; Khi $x\in(5\,;+\infty)$ thì $y'>0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; -4)$, đồng biến trên khoảng $(5 ; +\infty)$.

d) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 9}$. Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \{-3 ; 3\}$; $y' = \dfrac{-2(x^2 + 9)}{(x^2 - 9)^2}$;

$y' < 0$ trên các khoảng $(-\infty ; -3), (-3 ; 3), (3 ; +\infty)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng đó.

3. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. Tập xác định : $\mathbb{R}$; $y' = \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1 ; 1)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty ; -1), (1 ; +\infty)$.

4. Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ xác định trên đoạn $[0 ; 2]$ và có đạo hàm $y' = \dfrac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$ trên khoảng $(0 ; 2)$.

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
y'		$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	
y		0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0 ; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1 ; 2)$.

5. a) Xét hàm số $f(x) = \tan x - x, x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq 0, \ \forall x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$;

$f'(x) = 0$ chỉ tại một điểm $x = 0$. Do đó, $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, tức là $f(x) > f(0)$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Vì $f(0) = 0$ nên $\tan x > x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

b) Đặt $g(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$; $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có

$$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2$$

$$= \tan^2 x - x^2 = (\tan x - x)(\tan x + x) \geq 0 \text{ trên } \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right),$$

$g'(x) = 0$ chỉ tại một điểm $x = 0$. Do đó, $g(x)$ đồng biến trên $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$.

Vì $g(0) = 0$ nên $g(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3} > 0$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ hay $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ trên khoảng $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$.