§ 2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

1. Hiểu khái niệm cực đại, cực tiểu ; biết phân biệt với khái niệm lớn nhất, nhỏ nhất.

2. Biết vận dụng các điều kiện đủ để hàm số có cực trị. Sử dụng thành thạo các điều kiện đủ để tìm cực trị.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

1. Trong hoạt động $_1$, cần chỉ ra điểm cực đại, cực tiểu bằng cách quan sát trực quan các hình vẽ (đồ thị của các hàm số quen thuộc). Tính chất địa phương của cực trị biểu hiện ở việc chọn các khoảng (lân cận) của điểm cực trị.

Cần chỉ cho học sinh thấy rằng giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số không chắc lớn hơn (bé hơn) giá trị của hàm số tại các điểm tương đối xa (điểm không thuộc lân cận đang xét).

Cũng trong hoạt động này, ta cung cấp cho học sinh một minh hoạ cụ thể về mối liên hệ giữa đạo hàm cấp một và cực trị sẽ được phát biểu chính xác.

Hoạt động $_1$ gợi ý cho học sinh thấy mối liên hệ giữa tính đơn điệu (tức là giữa dấu của đạo hàm) và cực trị của hàm số.

Hàm số $y = -x^2 + 1$, có đạo hàm $y' = -2x$. Vì $y' < 0$ khi $x \in (0;+\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và $y' > 0$ khi $x \in (-\infty;0)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Hàm số $y = \frac{x}{3}(x-3)^2$ có đạo hàm $y' = x^2 - 4x + 3$ đổi dấu khi qua các điểm $x = 1$ và $x = 3$ nên hàm số có cực trị.

Hoạt động $_2$ yêu cầu chứng minh khẳng định 3 trong phần Chú ý của SGK.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0.

Với $\Delta x > 0$, ta có $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0.$

Lấy giới hạn vế trái, ta được

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \le 0. \qquad (1)$$

Với $\Delta x < 0$, ta có $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0.$

Lấy giới hạn vế trái, ta được

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ge 0. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $f'(x_0) = 0$.

2. Đối với học sinh khá, giỏi có thể nêu ví dụ về những hàm số không có đạo hàm tại x_0 nhưng vẫn có cực trị tại đó. Chẳng hạn hàm số

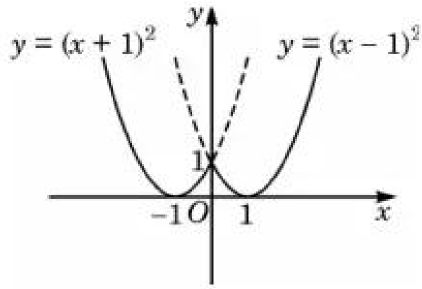
$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 \text{ nếu } x\ge 0\\(x+1)^2 \text{ nếu } x<0\end{cases}$$

không có đạo hàm tại $x_0=0$ vì

$$f'(0^-)=2,\ f'(0^+)=-2,$$

nhưng có cực đại (địa phương) tại điểm đó và

$$f(0)=f_{CĐ}=1 \text{ (H.7).}$$



Hình 7

Đây cũng là một ví dụ chứng tỏ rằng

"Nếu hàm số $f(x)$ có x_0 là điểm cực trị thì không thể suy ra được

$$\begin{cases}f'(x_0)=0\\f'(x_0) \text{ đổi dấu khi qua } x_0\text{".}\end{cases}$$

3. Lưu ý rằng, đối với nhiều hàm số thông dụng (như hàm đa thức, hàm lượng giác, ...), sử dụng quy tắc II thuận tiện hơn quy tắc I.

Đối với hàm số không có đạo hàm cấp một (và do đó không có đạo hàm cấp hai), không thể sử dụng quy tắc II để tìm cực trị được.

C. BÀI TẬP

1. a) $y=2x^3+3x^2-36x-10 \Rightarrow y'=6x^2+6x-36$,

$$y'=0 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=-3.\end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	71	↘	-54	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$ và $y_{CĐ}=71$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và $y_{CT}=-54$.

b) $y = x^4 + 2x^2 - 3 \Rightarrow y' = 4x^3 + 4x$,

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y_{CT} = -3$.

c) $y = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$,

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{CĐ} = -2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = 2$.

d) $y = x^3(1-x)^2 \Rightarrow y' = x^2(1-x)(3-5x)$,

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2(1-x)(3-5x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3}{5} \\ x = 1. \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{108}{3125}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = \dfrac{3}{5}$ và $y_{CĐ} = \dfrac{108}{3125}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = 0$.

e) $y = \sqrt{x^2 - x + 1} \Rightarrow y' = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$.

Vì $x^2 - x + 1 > 0, \ \forall x$ nên y và y' có tập xác định là $\mathbb{R}$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{1}{2}$ và $y_{CT} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. a) $y = x^4 - 2x^2 + 1$; $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$;

$y'' = 12x^2 - 4$;

$y''(0) = -4 < 0$, hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CĐ} = 1$;

$y''(\pm 1) = 8 > 0$, hàm số đạt cực tiểu tại hai điểm $x = \pm 1$ và $y_{CT} = 0$.

b) $y = \sin 2x - x$; $y' = 2\cos 2x - 1$,

$y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

$y'' = -4\sin 2x$.

Trên khoảng $(-\pi\,;\,\pi)$ đạo hàm y' có bốn nghiệm là $\pm\dfrac{\pi}{6}\,;\pm\dfrac{5\pi}{6}$.

$y''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-4\sin\dfrac{\pi}{3}=-2\sqrt{3}<0$, hàm số đạt cực đại tại $x=\dfrac{\pi}{6}$.

$y''\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=-4\sin\dfrac{5\pi}{3}=2\sqrt{3}>0$, hàm số đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{5\pi}{6}$.

$y''\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-4\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}>0$, hàm số đạt cực tiểu tại $x=-\dfrac{\pi}{6}$.

$y''\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)=-4\sin\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)=-2\sqrt{3}<0$, hàm số đạt cực đại tại $x=-\dfrac{5\pi}{6}$.

Vậy hàm số đạt cực đại tại các điểm $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$; đạt cực tiểu tại các điểm $x=-\dfrac{\pi}{6}+l\pi$ $(k, l\in\mathbb{Z})$.

c) $y=\sin x+\cos x \Rightarrow y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$y'=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $y'=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$y''=-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$$y''\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)=-\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=\begin{cases}-\sqrt{2} & \text{nếu } k \text{ chẵn}\\ \sqrt{2} & \text{nếu } k \text{ lẻ.}\end{cases}$$

Do đó, hàm số đạt cực đại tại các điểm $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ và đạt cực tiểu tại các điểm $x=\dfrac{\pi}{4}+(2k+1)\pi,\ \forall k\in\mathbb{Z}$.

d) $y=x^5-x^3-2x+1$; $y'=5x^4-3x^2-2$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm1$,

$y''=20x^3-6x$.

$y''(1) = 14 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$,

$y''(-1) = -14 < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

3. Đặt $f(x) = \sqrt{|x|}$. Giả sử $x > 0$, ta có

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng đạt cực tiểu tại điểm đó vì

$$f(x) = \sqrt{|x|} \text{ nên } f(x) \geq 0 = f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. $y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$; $y' = 3x^2 - 2mx - 2$.

Vì $\Delta' = m^2 + 6 > 0$ với mọi $m \in \mathbb{R}$ nên phương trình $y' = 0$ luôn luôn có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi qua các nghiệm đó.

Điều đó chứng tỏ rằng hàm số luôn có một cực đại và một cực tiểu.

5. Nếu $a = 0$ thì hàm số trở thành $y = -9x + b$. Hàm số này không có cực trị. Vậy ta chỉ xét trường hợp $a \neq 0$. Khi đó, ta có

$$y' = 5a^2x^2 + 4ax - 9 \; ; \; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{9}{5a} \\ x = \dfrac{1}{a}. \end{array} \right.$$

Xét hai trường hợp :

a) Với $a < 0$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{a}$		$-\frac{9}{5a}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Theo giả thiết $x = -\frac{5}{9}$ là điểm cực đại nên

$$\frac{1}{a} = -\frac{5}{9} \Leftrightarrow a = -\frac{9}{5}.$$

Mặt khác, giá trị cực tiểu là số dương nên $y_{CT} = y\left(-\frac{9}{5a}\right) = y(1) > 0$

(hiển nhiên $y\left(\frac{1}{a}\right) > y\left(-\frac{9}{5a}\right)$). Từ đó

$$y(1) = \frac{5a^2}{3} + 2a - 9 + b = \frac{5}{3}.\frac{81}{25} + 2\left(-\frac{9}{5}\right) - 9 + b > 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{36}{5} + b > 0 \Leftrightarrow b > \frac{36}{5}.$$

b) Với $a > 0$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{9}{5a}$		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Theo giả thiết ta có

$$-\frac{9}{5a} = -\frac{5}{9} \Leftrightarrow \quad a = \frac{81}{25}$$

và $\qquad y_{CT} = y\left(\frac{1}{a}\right) > 0 \Leftrightarrow b > \frac{400}{243}.$

Đáp số : $\begin{cases} a = -\frac{9}{5} \\ b > \frac{36}{5} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = \frac{81}{25} \\ b > \frac{400}{243}. \end{cases}$

6. Hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-m\}$; $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2}$.

Nếu hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ thì $y'(2) = 0$

$\Leftrightarrow m^2+4m+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-3. \end{array}\right.$

Xét hai trường hợp :

a) Với $m=-1$, ta có $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$;

$$y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x=0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên chứng tỏ hàm số không đạt cực đại tại $x=2$.

b) Với $m=-3$, ta có $y'=\dfrac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$,

$$y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+8=0 \\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4. \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=2$.

Kết luận : Với $m=-3$ hàm số đạt cực đại tại $x=2$.