§2 HÀM SỐ LUỸ THỪA

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

1. Biết định nghĩa và công thức tính đạo hàm của hàm số luỹ thừa.

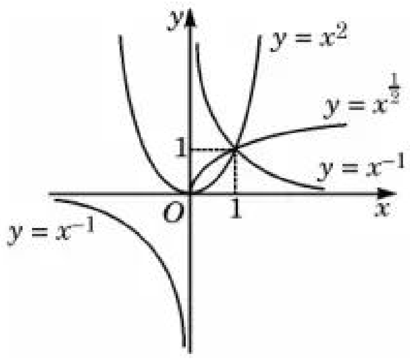
2. Biết khảo sát các hàm số luỹ thừa, biết các tính chất của hàm số luỹ thừa và dạng đồ thị của chúng.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

1. Định nghĩa hàm số luỹ thừa

Sau khi nêu định nghĩa hàm số luỹ thừa bởi công thức $y = x^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ cho trước), nên yêu cầu học sinh đưa thêm các ví dụ về hàm số luỹ thừa với các số mũ nguyên dương, nguyên âm, hữu tỉ, vô tỉ.

Hoạt động 1 nêu ba hàm số học sinh đã được học ở các lớp dưới (H.36). Tập xác định của hàm số $y = x^2$ là $\mathbb{R}$, của hàm số $y = x^{\frac{1}{2}}$ là $(0\,;+\infty)$, của hàm số $y = x^{-1}$ là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Từ đó gợi ý cho học sinh nhận xét tập xác định của hàm số luỹ thừa tuỳ thuộc vào giá trị của số mũ α nhưng luôn chứa khoảng $(0\,;+\infty)$. Điều này hoàn toàn phù hợp với cách định nghĩa luỹ thừa với số mũ nguyên dương, nguyên âm, hữu tỉ, vô tỉ.



Hình 36

2. Đạo hàm của hàm số luỹ thừa

Công thức tính đạo hàm của hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ được SGK thừa nhận mà không chứng minh. Ta có thể chứng minh như sau :

Với $x > 0$ ta có $x = \mathrm{e}^{\ln x}$. Vì vậy $y = x^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$.

Từ đó

$$y' = (x^{\alpha})' = (\mathrm{e}^{\alpha \ln x})' = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^{\alpha}.\alpha.\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Như vậy, để chứng minh công thức đạo hàm của hàm số luỹ thừa, cần sử dụng công thức đạo hàm của hàm số mũ và lôgarit. Do đó, sau §4 có thể chứng minh lại công thức trên cho học sinh.

Các hoạt động 2, 3 rất đơn giản, chỉ cần áp dụng công thức tính đạo hàm của các hàm số luỹ thừa và hàm hợp của hàm số đó.

Đáp án của hoạt động 2 :

$$\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}\,;$$

$$\left(x^{\pi}\right)' = \pi x^{\pi - 1}\,;$$

$$\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2} - 1}.$$

Đáp án của hoạt động 3 :

$$\left[(3x^2-1)^{-\sqrt{2}}\right]' = -\sqrt{2}(3x^2-1)^{-\sqrt{2}-1}(3x^2-1)' = \frac{-6x\sqrt{2}}{(3x^2-1)^{\sqrt{2}+1}}.$$

3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số luỹ thừa

Khi khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số luỹ thừa tổng quát, cần nhắc lại tập xác định của hàm số luỹ thừa tuỳ thuộc vào số mũ nhưng luôn chứa khoảng $(0\,;+\infty)$. Do đó, ta chỉ khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số luỹ thừa tổng quát $y = x^{\alpha}$ (với $\alpha \in \mathbb{R}$) trên khoảng $(0\,;+\infty)$.

Còn các trường hợp α cụ thể thì phải khảo sát trên toàn tập xác định của hàm số. Chẳng hạn ở THCS, ta đã khảo sát hàm số $y = x^2$ trên tập xác định $\mathbb{R}$, còn hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ được khảo sát trên $\mathbb{R}^*$.

SGK đưa ra đồ thị của ba hàm số $y = x^3$, $y = x^{-2}$, $y = x^{\pi}$ do máy tính vẽ. Dựa vào các đồ thị, có thể yêu cầu học sinh phát biểu các tính chất của các hàm số tương ứng như : tập xác định ; chiều biến thiên ; tính chẵn, lẻ ; tính đối xứng ; tiệm cận ; ...

C. BÀI TẬP

1. a) $(-\infty; 1)$; b) $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; c) $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$; d) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

2. a) $y' = \dfrac{1}{3}(4x-1)(2x^2-x+1)^{-\frac{2}{3}}$; b) $y' = -\dfrac{1}{4}(2x+1)(4-x-x^2)^{-\frac{3}{4}}$;

c) $y' = \dfrac{3\pi}{2}(3x+1)^{\frac{\pi}{2}-1}$; d) $y' = -\sqrt{3}(5-x)^{\sqrt{3}-1}$.

3. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^{\frac{4}{3}}$.

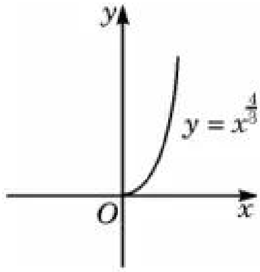
• Tập xác định : $(0\,;+\infty)$.

• Sự biến thiên

Đạo hàm : $y' = \dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$.

$y' > 0$ trên khoảng $(0\ ;+\infty)$ nên hàm số đồng biến.

Giới hạn : $\lim\limits_{x\to 0} y = 0,\ \lim\limits_{x\to +\infty} y = +\infty$.



Hình 37

• Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

• Đồ thị (H.37).

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^{-3}$.

• Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• Sự biến thiên

Đạo hàm : $y' = -\dfrac{3}{x^4}$;

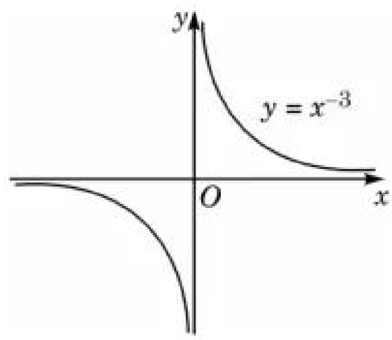
$y' < 0$ trên tập xác định nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $(-\infty\ ;0), (0\ ;+\infty)$.

Giới hạn

$$\lim_{x\to -\infty} y = 0,\ \lim_{x\to +\infty} y = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} y = -\infty,\ \lim_{x\to 0^+} y = +\infty.$$

Đồ thị có tiệm cận ngang là trục hoành, tiệm cận đứng là trục tung.



Hình 38

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	
y	0	$\searrow$ $-\infty$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	0

• Đồ thị : (H.38).

Hàm số đã cho là hàm số lẻ nên đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ.

4. a) Vì cơ số $4,1 > 1$ nên $(4,1)^{2,7} > (4,1)^0 = 1$;

b) Vì cơ số $0,2 < 1$ nên $(0,2)^{0,3} < (0,2)^0 = 1$;

c) Tương tự, $(0,7)^{3,2} < (0,7)^0 = 1$;

d) $\sqrt{3}^{0,4} > \sqrt{3}^0 = 1$.

5. a) Vì $3,1 < 4,3$ nên $(3,1)^{7,2} < (4,3)^{7,2}$;

b) $\left(\dfrac{10}{11}\right)^{2,3} < \left(\dfrac{12}{11}\right)^{2,3}$;

c) $(0,3)^{0,3} > (0,2)^{0,3}$.