§2 TÍCH PHÂN

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

1. Hiểu khái niệm tích phân (hay tích phân xác định) được bắt nguồn từ những bài toán thực tế. Chẳng hạn, bài toán tính diện tích hình thang cong.

2. Hiểu định nghĩa tích phân của hàm số liên tục trên một đoạn là một số hoàn toàn xác định nhờ vào chính nguyên hàm của nó.

3. Biết các tính chất, phép toán và các phương pháp tính tích phân.

4. Vận dụng được phép tính tích phân trong các bài toán hình học (tính diện tích, tính thể tích).

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

I – ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN

1. Diện tích hình thang cong

Hoạt động Δ_1 gợi lên cách tiếp cận khái niệm tích phân.

• Tính trực tiếp diện tích một hình thang được cho bởi các đường (dưới dạng đồ thị các hàm số). Diện tích $\mathcal{S}$ của hình thang T bằng

$$\frac{3+11}{2}.4 = 28.$$

• $S(t) = \dfrac{3+2t+1}{2}(t-1) = t^2 + t - 2,\ t \in [1\ ;\ 5]$ là diện tích hình thang (H.45 SGK). Đó là một hàm số liên tục trên đoạn $[1\ ;\ 5]$.

Vì $S'(t) = 2t + 1,\ t \in [1\ ;\ 5]$, nên $S(t)$ là một nguyên hàm của $f(t) = 2t + 1$ (có đồ thị biểu diễn cạnh xiên của hình thang) và diện tích hình thang $\mathcal{S} = S(5) - S(1) = 28 - 0 = 28$

(hiệu số của giá trị nguyên hàm tại $t = 5$ và $t = 1$).

Khái niệm hình thang cong giúp ta giải bài toán tìm diện tích một hình phẳng được giới hạn bởi một đường cong khép kín (vì nó bằng tổng diện tích của một số hình thang cong dạng này hay dạng khác), bằng cách chuyển từ bài toán phức tạp về bài toán đơn giản. Cuối cùng, ta giải quyết bài toán tìm diện tích hình thang cong với "cạnh" trên là đồ thị của hàm số liên tục trên một đoạn. Hình thang cong này mở rộng hơn hình T trong $_1$ ở chỗ cạnh xiên thẳng thay bởi "cạnh xiên cong". Câu hỏi 2 và 3 trong $_1$ là gợi ý cho quá trình xác định diện tích hình thang cong, đồng thời phục vụ cho định nghĩa khái niệm tích phân.

2. Định nghĩa tích phân

Chuẩn bị cho phát biểu định nghĩa tích phân, ta thực hiện hoạt động $_2$. Việc chứng minh đẳng thức

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

với $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a\ ;\ b]$ là dễ dàng. Thật vậy, vì $\quad F(x) = G(x) + C, C \in \mathbb{R}, x \in [a\ ;\ b],$

nên $\quad F(b) - F(a) = (G(b) + C) - (G(a) + C) = G(b) - G(a).$

Điều quan trọng cần rút ra ở đây là : Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a\ ;\ b]$, thì hiệu số $F(b) - F(a)$ là bất biến đối với họ nguyên hàm của $f(x)$. Đây là căn cứ khoa học để đưa ra định nghĩa tích phân. Định nghĩa này là hợp lí vì mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn đó (xem Định lí 3 của §1).

Chú ý

1) Định nghĩa tích phân

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

chỉ được áp dụng khi biết một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên đoạn $[a\ ;\ b]$.

2) Tích phân $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là một số, còn nguyên hàm là một (họ) hàm số (nó còn được gọi là tích phân không xác định).

3) $\int_a^b f(x)\,dx$ không phụ thuộc vào chữ viết biến số trong dấu tích phân, mà chỉ phụ thuộc vào hàm số f và đoạn $[a\,;\,b]$.

4) Diện tích hình thang cong (H.50, SGK) là minh hoạ hình học của tích phân một hàm số không âm. Do đó, công thức tính diện tích hình thang cong đang xét được cho bởi tích phân

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

II – TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Theo chương trình quy định, ta chỉ đưa ra ba tính chất cơ bản nhất của tích phân. Những tính chất còn lại sẽ được đưa ra ở phần *Kiến thức bổ sung*.

Bây giờ, ta chứng minh Tính chất 1 và Tính chất 2. Hai tính chất này được gọi là tính chất tuyến tính của tích phân.

Chứng minh Tính chất 1 :

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, (k \text{ là hằng số}).$$

Thật vậy, giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a\,;\,b]$. Khi đó, $kF(x)$ là một nguyên hàm của $k\,f(x)$ trên đoạn $[a\,;\,b]$. Ta có

$$\int_a^b kf(x)dx = \left(kF(x)\right)\Big|_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a))$$

$$= kF(x)\Big|_a^b = k\int_a^b f(x)dx.$$

Chứng minh Tính chất 2 :

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Ta chỉ chứng minh

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Giả sử $F(x)$ và $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$ và $g(x)$ trên đoạn $[a\,;\,b]$. Khi đó, $F(x)+G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)+g(x)$ trên đoạn $[a\,;\,b]$. Do đó,

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \big(F(x)+G(x)\big)\Big|_a^b = (F(b)+G(b))-(F(a)+G(a))$$

$$= (F(b)-F(a))+(G(b)-G(a)) = F(x)\Big|_a^b + G(x)\Big|_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Tính chất 3 có thể minh hoạ hình học : Diện tích của hình lớn bằng tổng diện tích các hình con (không giao nhau).

Tính chất 3 được mở rộng : Với $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_k < b$, ta cũng có

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{c_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\mathrm{d}x + \ldots + \int_{c_k}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

III – PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

Nhờ định nghĩa và các tính chất của tích phân, ta có thể tính được một số lớn tích phân. Tuy nhiên, vẫn còn nhiều tích phân thường gặp tuy có dạng đơn giản nhưng với công cụ trên, ta chưa thể tính trực tiếp được. Trong những trường hợp này, ta cần đến các phương pháp khác.

1. Phương pháp đổi biến số

Trước hết, ta xét các ví dụ sau đây.

a) Xét tích phân (trong 4)

$$\int_0^1 (2x+1)^2\,\mathrm{d}x.$$

1) Tính trực tiếp nhờ khai triển, ta được

$$I = \int_0^1 (2x+1)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (4x^2+4x+1)\mathrm{d}x = \frac{13}{3}.$$

2) Đặt $u = 2x + 1$, ta có $u' = 2$, $u(0) = 1, u(1) = 3$ và $(2x+1)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}u^2\mathrm{d}u$.

Tính $\int_1^3 \frac{1}{2}u^2\mathrm{d}u = \frac{1}{6}u^3\Big|_1^3 = \frac{13}{3}$. Vậy $I = \int_0^1 (2x+1)^2\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{2}u^2\mathrm{d}u = \frac{13}{3}$.

b) Xét tích phân $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

Đặt $x = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, viết tích phân theo biến t và các cận mới 0 ; $\frac{\pi}{4}$

(vì $\tan t = 0$ thì $t = 0$; vì $\tan t = 1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$) rồi tính tích phân mới nhận được.

Từ $x = \tan t$, ta có $u' = \frac{1}{\cos^2 t}$, $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 t} = \cos^2 t$.

Do đó

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t.\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t = t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}. \text{ Vậy } \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

Hai ví dụ trên đưa ra hai dạng của phép đổi biến số trong tích phân. Với mỗi dạng của phép đổi biến số ấy, tích phân mới tương ứng với cận mới, hàm mới của biến mới. Ta có thể tính được tích phân mới. Vấn đề còn lại là giá trị của tích phân mới có bằng giá trị của tích phân ban đầu hay không ?

Các định lí dưới đây trả lời cho câu hỏi này (SGK không chứng minh).

Định lí 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha ; \beta]$ sao cho $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ và $a \le \varphi(t) \le b$ với mọi $t \in [\alpha ; \beta]$.

Khi đó $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Chứng minh. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Ta có

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Mặt khác, vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, nên $F(\varphi(t))$ là nguyên hàm của $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ trên đoạn $[\alpha\ ;\ \beta]$. Vậy

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Từ Định lí 1 ta rút ra quy tắc đổi biến số :

1. Đặt $x = \varphi(t)$, ta xác định đoạn $[\alpha\ ;\beta]$(*) sao cho $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$, $\forall t \in [\alpha\ ;\ \beta]$;

2. Biến đổi $f(x)\mathrm{d}x = f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = g(t)\mathrm{d}t$.

3. Tìm một nguyên hàm $G(t)$ của $g(t)$.

4. Tính $\displaystyle\int_a^\beta g(t)\mathrm{d}t = G(\beta) - G(\alpha)$.

5. Kết luận $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(\beta) - G(\alpha)$.

Ví dụ. Tính $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

Giải. Đặt $x = \sin t$, ta có $x' = \cos t$; $\sin t = 0$ thì $t = 0$; $\sin t = \dfrac{1}{2}$ thì $t = \dfrac{\pi}{6}$.

Mặt khác

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}.\cos t\mathrm{d}t = \frac{\cos t}{\cos t}\mathrm{d}t = \mathrm{d}t,\ t \in \left[0\ ;\frac{\pi}{6}\right].$$

(*) Thường lấy đoạn $\left[\alpha\ ;\beta\right]$ (hoặc $\left[\beta;\alpha\right]$) nhỏ nhất sao cho $\varphi(t) \in [a\ ;b]$, $t \in \left[\alpha\ ;\beta\right]$ (hoặc $\left[\beta;\alpha\right]$).

và $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}t = t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}.$

Vậy $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{6}.$

Chú ý. Trường hợp $x = \varphi(t)$ với $\varphi(t)$ là hàm số giảm và có đạo hàm liên tục trên $[\beta\,;\,\alpha]$ ($\varphi(\alpha) = a$ và $\varphi(\beta) = b$), ta vẫn có

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Định lí 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$.

Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$ và $\alpha \le u(x) \le \beta$ với mọi $x \in [a\,;b]$ sao cho $f(x) = g(u(x))u'(x)$, $g(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha\,;\beta]$ thì

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\mathrm{d}u.$$

Chứng minh. Gọi $G(u)$ là một nguyên hàm của $g(u)$. Do đó, $G(u(x))$ là một nguyên hàm của $g(u(x))u'(x)$ trên đoạn $[a\,;\,b]$. Ta có

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = G(u(b)) - G(u(a)).$$

Mặt khác, $\displaystyle G(u(b)) - G(u(a)) = G(u)\Big|_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,\mathrm{d}u.$

Vậy $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,\mathrm{d}u.$

Từ Định lí 2 ta rút ra quy tắc đổi biến số :

1) Đặt $u = u(x)$;

2) Biểu thị $f(x)\mathrm{d}x$ theo $u = u(x)$ và du sao cho

$$f(x)\mathrm{d}x = g(u)\mathrm{d}u.$$

3) Tìm một nguyên hàm $G(u)$ của $g(u)$.

4) Tính $\displaystyle\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\mathrm{d}u = G(u(b)) - G(u(a))$.

5) Kết luận

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(u(b)) - G(u(a)).$$

Ví dụ. Tính

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\mathrm{d}x.$$

Giải. Đặt $u = \sin x$, ta có

$$\sin^2 x\cos x\mathrm{d}x = \sin^2 x(\sin x)'\mathrm{d}x = u^2\mathrm{d}u.$$

Hàm số $g(u) = u^2$, $u \in [0\ ;\ 1]$ $\left(u(0) = \sin 0 = 0\ ; u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1\right)$ có nguyên hàm $G(u) = \frac{u^3}{3}$. Vậy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\mathrm{d}x = \int_{\sin 0}^{\sin\frac{\pi}{2}} u^2\mathrm{d}u = \int_0^1 u^2\mathrm{d}u = \left.\frac{u^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Phương pháp tính tích phân từng phần

Hoạt động 5 nhằm dẫn dắt học sinh đến với phương pháp tính tích phân từng phần.

Ta có :

1) $\int (x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (x+1)\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x + C.$

2) Vậy $\int_0^1 (x+1)e^x dx = xe^x \Big|_0^1 = e.$

Hoạt động này cho thấy việc tính tích phân trên phải dựa vào phương pháp tính nguyên hàm từng phần. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có phương pháp tính tích phân từng phần.

Cơ sở để chứng minh định lí về phương pháp tính tích phân từng phần dựa vào công thức đạo hàm của tích $(uv)' = u'v + uv'$.

Chứng minh Định lí :

Ta có $\quad [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$

Tính tích phân hai vế của đẳng thức trên với cận từ a đến b :

$$\int_a^b [u(x)v(x)]' dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

hay $$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Các ví dụ 8 và 9 cần được giảng giải tỉ mỉ, nhất là sự phân tích biểu thức dưới dấu tích phân để chọn u và dv thích hợp.

C. BÀI TẬP

1. a) $\dfrac{3}{10\sqrt[3]{4}}(3\sqrt[3]{9} - 1)$; b) 0 ; c) $\ln 2$;

d) $11\dfrac{1}{3}$; e) $\dfrac{4}{3} - 3\ln 2$; g) 0.

2. a) 1, vì $\int_0^2 |1-x| dx = \int_0^1 |1-x| dx + \int_1^2 |1-x| dx$

$$= \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx \;;$$

b) $\frac{\pi}{4}$; c) $e + \frac{1}{2}$;

d) 0. *HD* : Ta có $\sin 2x.\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x$.

3. a) $\frac{5}{3}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\ln(1 + e)$; d) $\frac{\pi}{6}$.

4. a) 2 ; b) $\frac{1}{9}(2e^3 + 1)$; c) $2\ln 2 - 1$;

d) -1 ; *HD* : Áp dụng công thức tính tích phân từng phần hai lần.

5. a) $4\frac{2}{15}$; b) $\frac{1}{8} + \ln\frac{3}{2}$;

c) $3\ln\frac{2\sqrt{3}}{3}$; *HD* : $u = \ln(1 + x)$, $dv = \frac{1}{x^2}dx$.

6. $\frac{1}{42}$; *HD* : b) $u = x$, $dv = (1 - x)^5\,dx$.

D. KIẾN THỨC BỔ SUNG

Theo chương trình (chuẩn), ta mới nêu ba tính chất của tích phân. Bây giờ, ta sẽ nêu các tính chất cơ bản của tích phân.

Tính chất 1

$$\int_a^b 0dx = 0.$$

Thật vậy, nguyên hàm của hàm số lấy tích phân là $F(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Do đó, $\int_a^b 0dx = F(x)\Big|_a^b = C\Big|_a^b = C - C = 0.$

Tính chất 2

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a).$$

Thật vậy, một nguyên hàm của hàm số lấy tích phân là $F(x) = cx$.

Do đó $$\int_a^b c\mathrm{d}x = (cx)\Big|_a^b = cb - ca = c\,(b - a).$$

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$. Khi đó ta có các tính chất sau đây.

Tính chất 3

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ k \text{ là hằng số.}$$

Chứng minh. (Xem phần B. Nội dung bài học).

Tính chất 4

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chứng minh. (Xem phần B. *Nội dung bài học*).

Tính chất 5. Với $a < c < b$, ta có

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Chứng minh. (Xem SGK Giải tích 12).

Tính chất 6. Nếu $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a\,;\,b]$ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Chứng minh. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a\,;\,b]$. Vì $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a\,;\,b]$ nên $F(x)$ không giảm trên đoạn $[a\,;\,b]$. Do đó

$$F(b) - F(a) \geq 0,$$

tức là $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \geq 0.$$

Hệ quả. Nếu hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục và thoả mãn

$$f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [a\,;\,b]$$

thì $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Chú ý. Nếu $f(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[a\ ;\ b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$

Ý nghĩa hình học của kết quả này là diện tích hình thang cong được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a,\ x = b$.

Tính chất 7

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,\ (a \le b).$$

Thật vậy, vì $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,\ \forall x \in [a\ ;\ b]$ nên

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

hay $$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Tính chất 8. Nếu $m \le f(x) \le M,\ \forall x \in [a\ ;\ b]$; m, M là các hằng số thì

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a). \qquad (*)$$

Chứng minh. Suy được từ Hệ quả của Tính chất 6.

Hệ quả. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ thì tồn tại số $c \in [a\ ;\ b]$ sao cho

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad (**)$$

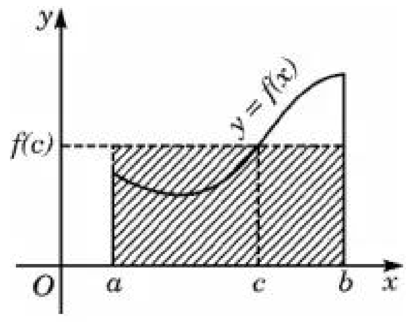
hay $$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ (a < b).$$

Chứng minh. Từ giả thiết suy ra $m \le f(x) \le M$, trong đó m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Do đó, theo Tính chất 8, ta có $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M.$

Nhờ tính chất : Hàm số liên tục trên một đoạn thì nhận mọi giá trị trung gian giữa m và M (sách giáo viên ĐS và GT 11 chuẩn), ta có

$$\exists c \in [a\,;\,b] : f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

hay $$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Hình 48

Công thức (**) thường gọi là công thức về giá trị trung bình.

• Ý nghĩa hình học của (**) : Diện tích của hình thang cong bằng diện tích hình chữ nhật có hai kích thước $(b-a)$ và $f(c)$ (H.48).