§ 3 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

1. Tính được giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) trên một đoạn của một số hàm số thường gặp.

2. Nắm vững phương pháp tính GTLN (GTNN) của một hàm số có đạo hàm trên một đoạn, trên một khoảng.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

1. Vì học sinh đã học định nghĩa GTLN (GTNN) của một hàm số trong Đại số 10, nên trước khi nêu cách tính bằng đạo hàm, ta cần nhắc lại các định nghĩa này.

Mặc dù đã học, nhưng để giúp học sinh nhớ kĩ khái niệm GTLN và GTNN SGK vẫn trình bày mục "*Định nghĩa*".

Trong mục này có trình bày một ví dụ về GTNN của hàm số trên một khoảng. Thông qua ví dụ này, SGK trình bày cách tìm GTNN nhờ khảo sát sự biến thiên của hàm số. Mặt khác, ví dụ này cũng cho thấy có thể tìm GTLN (GTNN) trên một tập không phải là đoạn.

2. Nội dung chủ yếu của mục này là nêu lên cách tính GTLN, GTNN trên một đoạn nhờ công cụ đạo hàm.

Định lí sau :

"Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;b] \Rightarrow \exists \max\limits_{[a\,;\,b]} f(x),\ \min\limits_{[a\,;\,b]} f(x)$" khẳng định sự tồn tại các giá trị này để người đọc yên tâm trước khi bắt đầu thực hiện việc tính toán. Vì vậy, mặc dù ở đây chỉ thừa nhận, SGK vẫn phải nêu định lí.

Chú ý rằng, một hàm số liên tục trên một khoảng vẫn có thể có GTLN, GTNN trên khoảng đó.

3. Quy tắc tìm GTLN, GTNN được trình bày cho hai trường hợp :

a) Nếu hàm số đơn điệu trên một đoạn thì GTLN, GTNN đạt được tại các đầu mút của đoạn.

b) Nếu hàm số không đơn điệu thì tiến hành việc tìm GTLN, GTNN theo quy tắc.

$_2$ giúp học sinh tự phát hiện ra quy tắc trong trường hợp b).

4. Khi giảng dạy phần này, giáo viên nên nhắc cho học sinh biết rằng để tính GTLN, GTNN trên một khoảng, ta khảo sát sự biến thiên của hàm số trên khoảng đó rồi từ đó rút ra kết luận. $_3$ là một minh hoạ cho cách làm trên.

Tuỳ đối tượng, có thể thay hàm số trong $_3$ bằng một hàm số đơn giản hơn. Chẳng hạn :

a) $f(x) = x^4 + 1$ có giá trị nhỏ nhất $\min f(x) = f(0) = 1$.

b) $g(x) = -3x^2 - 1$ có giá trị lớn nhất $\max g(x) = g(0) = -1$.

Câu hỏi trong $_3$ có đáp án sau đây.

- $f(x)$ xác định trên toàn bộ tập $\mathbb{R}$.

- $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

- Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Từ đó suy ra $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f_{CT}(x) = f(0) = -1$.

C. BÀI TẬP

1. a) $\min\limits_{[-4\,;\,4]} y = -41$, $\max\limits_{[-4\,;\,4]} y = 40$; $\min\limits_{[0\,;\,5]} y = 8$, $\max\limits_{[0\,;\,5]} y = 40$.

b) $\min\limits_{[0\,;\,3]} y = -\dfrac{1}{4}$, $\max\limits_{[0\,;\,3]} y = 56$; $\min\limits_{[2\,;\,5]} y = 6$, $\max\limits_{[2\,;\,5]} y = 552$.

c) $\min\limits_{[2\,;\,4]} y = 0$, $\max\limits_{[2\,;\,4]} y = \frac{2}{3}$; $\min\limits_{[-3\,;\,-2]} y = \frac{5}{4}$, $\max\limits_{[-3\,;\,-2]} y = \frac{4}{3}$.

d) $\min\limits_{[-1\,;\,1]} y = 1$, $\max\limits_{[-1\,;\,1]} y = 3$.

2. Hình vuông với cạnh bằng 4 cm là hình có diện tích lớn nhất : $\max S = 16\ \text{cm}^2$.

3. Hình vuông với cạnh bằng $4\sqrt{3}$ m là hình có chu vi nhỏ nhất : $\min P = 16\sqrt{3}$ m.

4. a) *Đáp số :* $\max y = 4$.

$$y = \frac{4}{1+x^2} \Rightarrow y' = \frac{-8x}{(1+x^2)^2}.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

b) *Đáp số :* $\max y = 1$.

$y = 4x^3 - 3x^4 \Rightarrow y' = 12x^2 - 12x^3 = 12x^2(1-x)$,

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$		$\nearrow$		1	$\searrow$	$-\infty$

5. a) $\min y = 0$.

b) $y = x + \frac{4}{x}$ $(x > 0)$;

Tập xác định : $(0\,;+\infty)$; $y' = 1 - \frac{4}{x^2}$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
y'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$\Vert\ +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min\limits_{(0\,;\,+\infty)} y = 4.$