§3 LÔGARIT

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

1. Biết định nghĩa, các quy tắc tính lôgarit và công thức đổi cơ số.

2. Biết vận dụng lôgarit để giải toán.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

1. Khái niệm lôgarit

Trước khi đưa ra định nghĩa một đối tượng toán học nào đó, ta phải chứng minh sự tồn tại của đối tượng này. Do đó, để định nghĩa, cần chứng minh sự tồn tại của lôgarit.

Tính lôgarit cơ số a của b, với a, b cho trước, là tìm số x sao cho $a^x = b$, tức là giải phương trình $a^x = b$. Như vậy, sự tồn tại nghiệm của phương trình này đồng nghĩa với sự tồn tại $\log_a b$.

Để xét nghiệm của phương trình $a^x = b$, người ta phải xây dựng hàm số mũ. Sau khi khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = a^x$ trên cùng một hệ trục toạ độ với đường thẳng $y = b$, ta thấy :

Phương trình $a^x = b$ không có nghiệm khi $b \leq 0$ và có duy nhất nghiệm khi $b > 0$. (Khi ấy, ta gọi nghiệm α của phương trình $a^x = b$ $(b > 0)$ là lôgarit cơ số a của b).

Từ đó suy ra nếu $b > 0$ thì lôgarit cơ số a của b luôn tồn tại.

Tuy nhiên, theo chương trình mới thì khái niệm lôgarit được trình bày trước hàm số mũ nên không thể sử dụng các tính chất của hàm số mũ để chứng minh sự tồn tại lôgarit cơ số a của b khi $b > 0$. SGK chỉ minh hoạ qua các ví dụ cụ thể (Ví dụ 1, hoạt động 2).

Ngoài ra, cần lưu ý rằng lôgarit cơ số a của b chỉ được định nghĩa với cơ số a dương và khác 1 vì các lí do sau :

• Với α bất kì, luỹ thừa a^α chỉ tồn tại nếu $a > 0$;

• Nếu $a = 1$ thì phương trình $1^x = b$ chỉ có nghiệm khi $b = 1$ và khi đó, nó có vô số nghiệm.

Đáp án của hoạt động 2 :

a) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$; $\log_3 \frac{1}{27} = -3$.

b) Không có số x, y nào để $3^x = 0$, $2^y = -3$ vì 3^x và 2^y luôn dương.

Đáp án của hoạt động 4 :

$$4^{\log_2 \frac{1}{7}} = \left(2^2\right)^{\log_2 \frac{1}{7}} = \left(2^{\log_2 \frac{1}{7}}\right)^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}\ ;$$

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}} = \left(5^{-2}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}} = \left(5^{\log_5 \frac{1}{3}}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9.$$

2. Các quy tắc tính lôgarit

Qua các hoạt động 5, 7, bằng cách tính toán trực tiếp, học sinh tự phát hiện các công thức tính lôgarit của một tích, một thương, sau đó mới chứng minh một cách chặt chẽ các công thức này. SGK chỉ chứng minh công thức tính lôgarit của tích. Có thể yêu cầu học sinh chứng minh thêm công thức tính lôgarit của thương.

Đáp án của hoạt động 5 :

$$\log_2 b_1 + \log_2 b_2 = 3 + 5 = 8,$$

$$\log_2(b_1 b_2) = 8.$$

Do đó, $\log_2 b_1 + \log_2 b_2 = \log_2(b_1 b_2)$.

Đáp án của hoạt động 7 :

$$\log_2 b_1 - \log_2 b_2 = 5 - 3 = 2,$$

$$\log_2 \frac{b_1}{b_2} = 2.$$

Do đó, $\log_2 b_1 - \log_2 b_2 = \log_2 \frac{b_1}{b_2}$.

Có thể kết hợp hai hoạt động này thành một hoạt động chung : Tính $\log_a b_1 + \log_a b_2$, $\log_a b_1 - \log_a b_2$ và so sánh với $\log_a(b_1 b_2)$, $\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right)$ tương ứng.

Hoạt động 6 chỉ nhằm vận dụng công thức tính lôgarit của tích nhiều thừa số. Đáp án là

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 + 2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{8} = \log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{8}$$

$$= \log_{\frac{1}{2}}\left(2.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{3}{8}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{12}.$$

Cần lưu ý rằng hoạt động này được thực hiện trước khi có công thức tính lôgarit của một luỹ thừa nên phải viết $2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ chứ không được viết $2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

Tuy nhiên, sau Định lí 3, có thể yêu cầu học sinh làm lại hoạt động này. Khi đó, đáp án là

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 + 2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{8} = \log_{\frac{1}{2}}\left(2.\left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{3}{8}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{12}.$$

3. Đổi cơ số

Hoạt động 8 yêu cầu tìm một hệ thức liên hệ ba kết quả thu được. Khi thực hiện, học sinh có thể đưa ra nhiều hệ thức khác nhau.

Đáp án : $\log_a b = \log_4 64 = 3$; $\log_c a = \log_2 4 = 2$; $\log_c b = \log_2 64 = 6$.

Từ đó suy ra : $\log_a b.\log_c a = \log_c b$ hoặc $\log_c a.\log_a b = \log_c b$ hoặc $\log_c a = \dfrac{\log_c b}{\log_a b}$ hoặc $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Trong các hệ thức trên, cần gợi ý cho học sinh rằng, hệ thức cuối cùng (Định lí 4) cho ta công thức đưa việc tính lôgarit theo cơ số a (ở vế trái) về việc tính lôgarit theo cơ số c (ở vế phải). Vì vậy, chỉ cần thiết lập các máy tính lôgarit với cơ số 10 và cơ số e. Đây là một trong những ý nghĩa thực tiễn của công thức đổi cơ số.

4. Các ví dụ áp dụng lôgarit

Qua các ví dụ này, học sinh được rèn luyện kĩ năng giải một vài dạng bài tập áp dụng lôgarit. Có thể thêm, bớt các ví dụ tuỳ vào đối tượng học sinh.

Riêng Ví dụ 9, cần lưu ý rằng ta chưa có tính chất để so sánh các lôgarit nên phải vận dụng tính chất của luỹ thừa. Sau §4, có thể yêu cầu học sinh áp dụng tính chất đơn điệu của hàm số lôgarit để so sánh trực tiếp như sau :

$$\log_2 3 > \log_2 2 = 1 = \log_6 6 > \log_6 5.$$

5. Lôgarit thập phân. Lôgarit tự nhiên

Mục này chỉ nhằm giới thiệu hai lôgarit thường gặp là lôgarit thập phân, lôgarit tự nhiên.

Trong một số tài liệu Toán, người ta kí hiệu lôgarit thập phân là lg còn trong máy tính cầm tay, phím để tính lôgarit thập phân được kí hiệu là log. Do đó để tiện cho việc sử dụng máy tính và đọc các sách tham khảo, SGK sử dụng cả hai kí hiệu log và lg.

C. BÀI TẬP

1. a) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2(2^{-3}) = -3$; b) $\log_{\frac{1}{4}} 2 = \log_{2^{-2}} 2 = -\frac{1}{2}$;

c) $\log_3 \sqrt[4]{3} = \log_3\left(3^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4}$; d) $\log_{0,5} 0,125 = \log_{0,5}(0,5^3) = 3$.

2. a) $4^{\log_2 3} = 2^{2\log_2 3} = 2^{\log_2(3^2)} = 9$;

b) $27^{\log_9 2} = 3^{3\log_{3^2} 2} = 3^{\log_3\left(2^{\frac{3}{2}}\right)} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$;

c) $9^{\log_{\sqrt{3}} 2} = 3^{2\log_{3^{\frac{1}{2}}} 2} = 3^{4\log_3 2} = 3^{\log_3 2^4} = 2^4 = 16$;

d) $4^{\log_8 27} = 2^{2\log_{2^3} 3^3} = 2^{\log_2 3^2} = 3^2 = 9$.

3. a) $\log_3 6.\log_8 9.\log_6 2 = \log_{2^3} 3^2.\log_3 6.\log_6 2$

$$= \frac{2}{3}\log_2 3.\log_3 6.\log_6 2 = \frac{2}{3}\log_2 2 = \frac{2}{3} \ ;$$

b) $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4 = \log_a b^2 + \log_a b^2 = 2\log_a b^2$

$$= 4\log_a |b|.$$

4. a) $\log_3 5 > \log_3 3 = 1$; $\log_7 4 < \log_7 7 = 1$.

Vậy $\log_3 5 > \log_7 4$.

b) $\log_{0,3} 2 < \log_{0,3} 1 = 0$; $\log_5 3 > \log_5 1 = 0$.

Vậy $\log_{0,3} 2 < \log_5 3$.

c) $\log_2 10 > \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$; $\log_5 30 < \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$.

Vậy $\log_2 10 > \log_5 30$.

5. a) Ta cần phân tích 1350 thành tích các luỹ thừa của 3, 5 và 30. Ta có

$$1350 = 3^2.5.30.$$

Do đó $$\log_{30} 1350 = 2\log_{30} 3 + \log_{30} 5 + \log_{30} 30$$
$$= 2a + b + 1.$$

b) Áp dụng tính chất đổi cơ số của lôgarit, ta có

$$\log_{25} 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 25} = \frac{\log_3(3.5)}{\log_3(5^2)} = \frac{1 + \log_3 5}{2\log_3 5}.$$

Do đó, ta phải tìm $\log_3 5$.

Theo đề bài

$$c = \log_{15} 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 15} = \frac{1}{1 + \log_3 5}.$$

Suy ra $\log_3 5 = \frac{1}{c} - 1$.

Vậy $$\log_{25} 15 = \frac{1 + \frac{1}{c} - 1}{2\left(\frac{1}{c} - 1\right)} = \frac{1}{2(1 - c)}.$$