§3 ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

1. Biết các công thức tính diện tích và thể tích các hình được cho bởi tích phân.

2. Biết một số dạng đồ thị của những hàm số quen thuộc để chuyển bài toán tính diện tích và thể tích theo công thức tính ở dạng tích phân.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

Phép tính tích phân được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực của thực tiễn và khoa học. Chương trình SGK Giải tích 12 chỉ nêu một ứng dụng của tích phân trong hình học thuộc chương trình THPT.

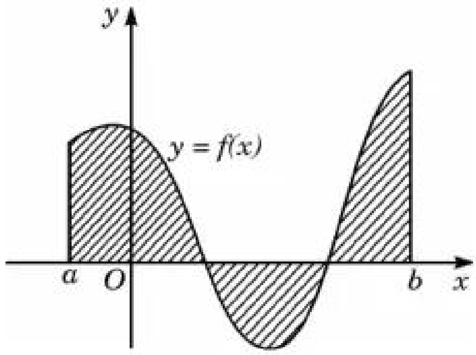
I – TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

Những hình phẳng mà ta xét đều được giới hạn bởi đồ thị các hàm số trên mặt phẳng toạ độ xOy. Để dễ dàng sử dụng công thức tính diện tích hình phẳng, ta xét hai loại hình phẳng : hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành, hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong (chú ý rằng cách phân loại này chỉ để dễ nhớ chứ chưa đầy đủ).

1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành

Hoạt động Ⓗ_1 của §2 cho ta hình dung về hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành.

Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành sẽ gồm một hoặc một số hình thang cong. Trên cơ sở đó, ta nhận được công thức tính diện tích là



Hình 49

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong là sự mở rộng của hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành.

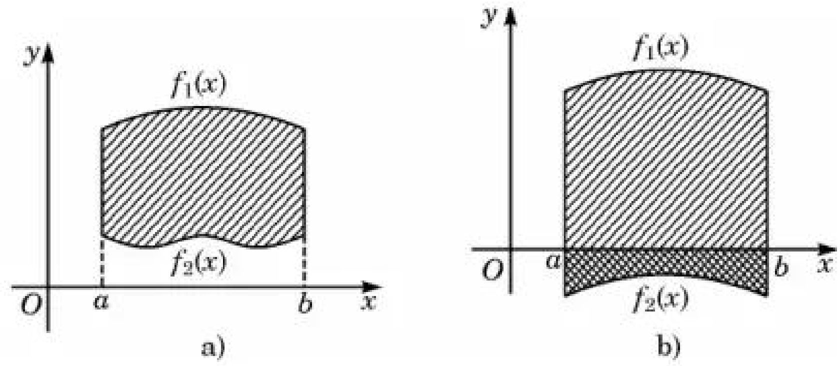
Trường hợp này công thức tính diện tích cho bởi

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx. \qquad (1)$$

Chứng minh công thức (1) qua các trường hợp sau đây.

a) $f_1(x) - f_2(x) \neq 0, \forall x \in (a\,;\,b)$. Khi đó (xem H.50a, b),

$$S = \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx \\ \displaystyle\int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b (-f_2(x))dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx. \end{array}\right.$$

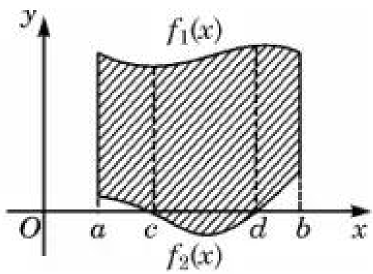


Hình 50

Chú ý. Hình phẳng có dạng như Hình 51 thì công thức (1) vẫn đúng. Vì

$$\int_a^c |f_1(x) - f_2(x)|\,dx + \int_c^d |f_1(x) - f_2(x)|\,dx + \int_d^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx =$$

$$= \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx.$$



Hình 51

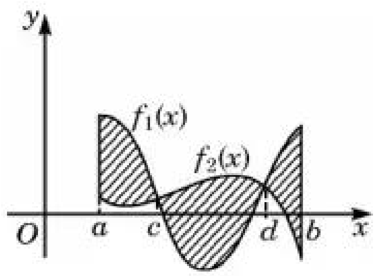
b) $f_1(x) - f_2(x) = 0$ tại $x = c$ và $x = d$

$(a < c < d < b)$.

Khi đó (H.52)

$$S = \int_a^c |f_1(x) - f_2(x)|\,dx + \int_c^d |f_1(x) - f_2(x)|\,dx + \int_d^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx$$

hay $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx$.



Hình 52

Chú ý. 1) Với $a < x < b$ mà $f_1(x) \geq f_2(x)$ hoặc $f_1(x) \leq f_2(x)$, ta có

$$S = \left[\begin{array}{l} \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx \\ \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx = -\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx. \end{array}\right.$$

Vậy $$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx = \left|\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx\right|.$$

Kết quả này giúp cho việc tính diện tích hình phẳng theo công thức (4) SGK có thể bỏ qua việc xét dấu của $f_1(x) - f_2(x) \neq 0$ trên đoạn $[a\ ;\ b]$, có thể bỏ qua cả việc vẽ hình của hình phẳng này (xem Ví dụ 2 và Ví dụ 3, SGK).

2) Do vai trò của các trục toạ độ như nhau, nên có thể biểu diễn phương trình các đường giới hạn hình phẳng bởi các hàm số của biến y và công thức tích phân để tính diện tích tương ứng cũng theo biến y.

II – TÍNH THỂ TÍCH

Ta thừa nhận công thức

$$V = \int_a^b S(x)\,dx, \qquad (2)$$

trong đó $S(x)$ là diện tích của thiết diện của vật thể $\mathscr{V}$. Thiết diện này vuông góc với trục Ox tại $x \in [a\ ;\ b]$ với a, b là các cận ứng với hai mặt phẳng song song và vuông góc với trục Ox, giới hạn vật thể $\mathscr{V}$.

Công thức (2) là căn cứ để từ đó tìm lại các công thức tính thể tích các hình khối ở chương trình THPT như :

Hình lăng trụ, hình chóp, hình chóp cụt, hình nón, hình nón cụt, hình cầu, ... hình tròn xoay.

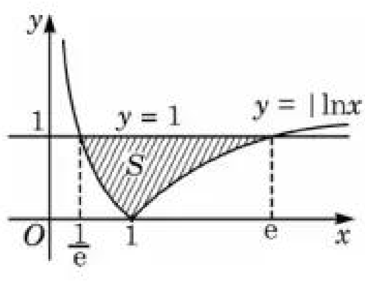
Vậy để sử dụng được công thức (2), giáo viên phải phân tích rõ vị trí hình học của vật thể, cách xác định diện tích thiết diện $S(x)$ và các cận a và b của biến x, hoặc nếu cần đổi vai trò của x cho y, ...

C. BÀI TẬP

1. a) $\dfrac{9}{2}$; b) $\dfrac{1}{e} + e - 2$. *HD :* (H.53). Ta có

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \big|1 - |\ln x|\big|\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^{1} (1 + \ln x)\,dx + \int_{1}^{e} (1 - \ln x)\,dx = \frac{1}{e} + e - 2.$$



Hình 53

c) 9 ; *HD* : $S = \int_3^6 \left[(6x - x^2) - (x-6)^2 \right] \mathrm{d}x = 2\int_3^6 (9x - x^2 - 18)\,\mathrm{d}x.$

2. $\frac{8}{3}$. *HD :* Phương trình tiếp tuyến là $y = 4x - 3$.

Do đó, diện tích phải tìm bằng

$$S = \int_0^2 \left| x^2 + 1 - 4x + 3 \right| \mathrm{d}x = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)\mathrm{d}x = \frac{8}{3}.$$

3. $\frac{9\pi - 2}{3\pi + 2}$. *HD :* Tính $S_1 = 2\int_0^2 \left[\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2} \right] \mathrm{d}x$ và $S_2 = 8\pi - S_1$.

Vậy $\frac{S_2}{S_1} = \frac{9\pi - 2}{3\pi + 2}$.

4. a) $\frac{16}{15}\pi$; b) $\frac{\pi^2}{2}$;

c) $\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$; *HD* : $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \mathrm{d}x.$

5. a) $\frac{\pi R^3}{3}(\cos\alpha - \cos^3\alpha)$, $\left(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{3} \right)$;

HD : Thể tích V của khối tròn xoay bằng

$$V = \pi \int_0^{R\cos\alpha} \tan^2 \alpha . x^2 \mathrm{d}x = \pi \tan^2 \alpha . \frac{x^3}{3} \Big|_0^{R\cos\alpha}$$

$$= \frac{\pi R^3}{3}(\cos\alpha - \cos^3\alpha).$$

b) Đặt $t = \cos\alpha \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{2} ; 1 \right]$ vì $\left(\alpha \in \left[0 ; \frac{\pi}{3} \right] \right)$, ta có $V = \frac{\pi R^3}{3}(t - t^3)$;

$$V' = \frac{\pi R^3}{3}(1 - 3t^2) \text{ ; } V' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ t = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{(loại)}. \end{array} \right.$$

Vậy $\max\limits_{\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]} V(\alpha) = \max\limits_{\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]} V(t) = V_{CĐ}\left(t = \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}\,\pi R^3}{27}$

(trong đó $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hay $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$).

D. BỔ SUNG KIẾN THỨC

Việc nắm vững công thức (2) giúp học sinh tính được thể tích của một số lớn vật thể chưa được đề cập trong môn hình học ở THPT.

Ví dụ. Tính thể tích vật thể $\mathscr{V}$ được giới hạn bởi hai mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2$ và $x^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$.

Giải. Ta vẽ một phần tám thứ nhất của vật thể này (H.54). Với mỗi $x \in [0\,;\,a]$, thiết diện của vật thể (vuông góc với trục Ox) tại x là một hình vuông có cạnh $y = z = \sqrt{a^2 - x^2}$. Do đó, diện tích thiết diện là

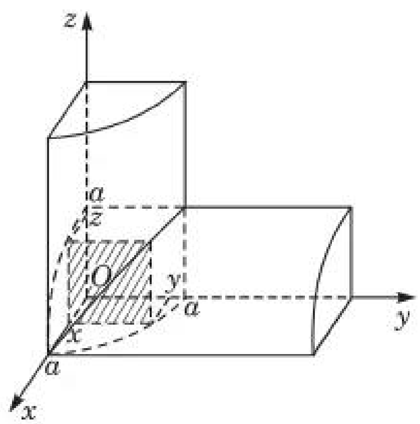
$S(x) = y.z = \sqrt{a^2 - x^2}.\sqrt{a^2 - x^2}$,

hay $S(x) = a^2 - x^2$, $x \in [0\,;\,a]$.

Vậy thể tích V của vật thể $\mathscr{V}$ sẽ bằng

$$V = 8\int_0^a S(x)\mathrm{d}x = 8\int_0^a (a^2 - x^2)\mathrm{d}x$$

hay $V = \frac{16a^3}{3}$.



Hình 54

Chú ý. Trong thực tế, ta đã gặp vật thể này. Đó là vật thể được tạo nên khi ta lấy giao vuông góc hai ống nước hình trụ có cùng bán kính bằng a.