§4 HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

1. Biết định nghĩa, công thức tính đạo hàm và các tính chất của hàm số mũ, hàm số lôgarit.

2. Biết các dạng đồ thị của hàm số mũ, hàm số lôgarit. Vận dụng được các tính chất để giải toán.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

Tương tự hàm số luỹ thừa, việc nghiên cứu hàm số mũ và hàm số lôgarit đều được thực hiện theo tiến trình : nêu định nghĩa, công thức tính đạo hàm và sau đó khảo sát hàm số. Từ đó đưa ra bảng tóm tắt các tính chất của các hàm số đó.

I – HÀM SỐ MŨ

1. Bài toán "lãi kép" được đưa vào theo yêu cầu của chương trình. SGK chọn bài toán này làm ví dụ mở đầu, dẫn đến khái niệm hàm số mũ, nên đã giả sử số tiền gửi ban đầu $P = 1$ (đơn vị triệu đồng). Nếu chọn $P \neq 1$ thì vốn tích luỹ sau n năm sẽ là $P_n = P.(1{,}07)^n$, với bài toán này, có thể thay đổi số tiền gửi ban đầu và lãi suất để được các kết quả phù hợp với thực tế.

Công thức tính khối lượng chất phóng xạ bị phân rã trong Vật lí cũng cho ta một ví dụ về hàm số mũ với biến số là thời gian t, tức là biến liên tục. Còn biến số n ở ví dụ bài toán "lãi kép" là biến rời rạc.

Đáp án của hoạt động $_1$:

Vào năm 2010, tức là sau 7 năm, dân số của Việt Nam là

$$80\,902\,400.\mathrm{e}^{7.0{,}0147} \approx 89\,670\,648 \text{ (người).}$$

Tương tự trường hợp lôgarit, khi định nghĩa hàm số mũ $y = a^x$, người ta cũng chỉ xét cơ số a dương và khác 1, vì nếu $a = 1$ thì hàm số $y = 1^x$ trở thành hàm hằng $y = 1$.

2. Một trong những sai lầm của học sinh là hay nhầm lẫn hàm số luỹ thừa với hàm số mũ. Hai hàm số này có sự khác biệt ở cơ số và số mũ. Hàm luỹ thừa có số mũ không đổi, cơ số biến thiên. Ngược lại, hàm mũ có số mũ biến thiên, cơ số không đổi. Để học sinh phân biệt được sự khác nhau đó của hai hàm số, SGK xét hoạt động $_2$.

Trong hoạt động này, học sinh phải vận dụng định nghĩa hàm số mũ và chỉ ra được cơ số của hàm số mũ. Đáp án :

a) $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$ là hàm số mũ với cơ số $\sqrt{3}$;

b) $y = 5^{\frac{x}{3}} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^x$ là hàm số mũ với cơ số $\sqrt[3]{5}$;

c) $y = x^{-4}$ là hàm số luỹ thừa, không phải là hàm số mũ ;

d) $y = 4^{-x} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ là hàm số mũ với cơ số $\dfrac{1}{4}$.

II – HÀM SỐ LÔGARIT

Do nhu cầu giảm tải, chương trình Giải tích 12 (chuẩn) quy định không trình bày tổng quát về hàm số ngược và yêu cầu dùng khái niệm lôgarit của một số để định nghĩa hàm số lôgarit. Như vậy, hàm số lôgarit cơ số a là ánh xạ f từ khoảng $(0\,;+\infty)$ vào tập số thực $\mathbb{R}$ theo quy luật cho tương ứng mỗi số x với số $\log_a x$, tức là

$$f:(0\,;+\infty)\longrightarrow(-\infty\,;+\infty)$$

$$x\longmapsto\log_a x.$$

Đáp án của hoạt động $\triangle_3$:

$$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),$$

$$y'=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

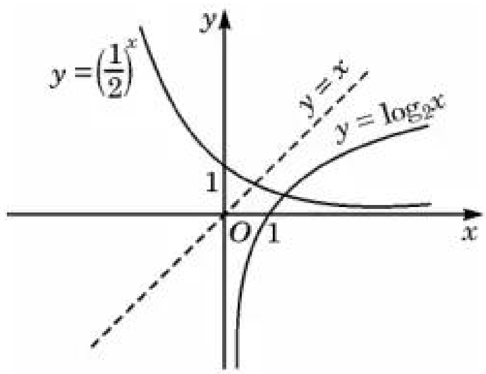
Đáp án của hoạt động $\triangle_4$:

Các đồ thị ở mỗi hình 35, 36 SGK đều đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$.

Từ hoạt động này, nên tổng kết cho học sinh thấy rằng : Đồ thị của các hàm số $y=a^x$, $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$ (với cùng cơ số), đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất, tức là đường thẳng $y=x$.

Nên nhấn mạnh "cùng cơ số", vì nếu hàm số mũ và hàm số lôgarit với cơ số khác nhau thì đồ thị không đối xứng qua đường thẳng $y=x$, thậm chí khác nhau rất xa.

Chẳng hạn, đồ thị của các hàm số $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ và $y=\log_2 x$, vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy, có dạng như ở Hình 39.



Hình 39

Sau khi học §4, học sinh phải nắm vững và sử dụng thành thạo các tính chất của hàm số mũ, hàm số lôgarit và đồ thị của chúng để giải bài tập ở §5 và Chương 3.

C. BÀI TẬP

1. Đề bài chỉ yêu cầu học sinh vẽ đồ thị mà không cần khảo sát chi tiết, vì các hàm số mũ với cơ số lớn hơn hoặc nhỏ hơn 1 đã được khảo sát đầy đủ trong lí thuyết.

Đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x}$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = 4^x$ qua trục tung.

2. a) $y' = 2e^x(x+1) + 6\cos 2x$;

b) $y' = 10x + 2^x(\sin x - \ln 2.\cos x)$;

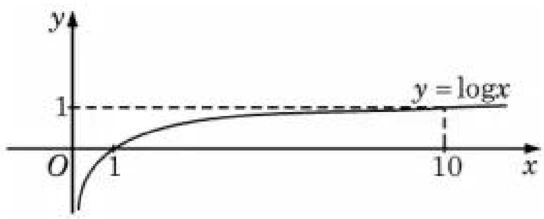
c) $y' = \dfrac{1-(x+1)\ln 3}{3^x}$.

3. a) $\left(-\infty ; \dfrac{5}{2}\right)$; b) $(-\infty ; 0) \cup (2 ; +\infty)$;

c) $(-\infty ; 1) \cup (3 ; +\infty)$; d) $\left(-\dfrac{2}{3} ; 1\right)$.

4. a) (H. 40).

b) Bạn đọc tự vẽ.



Hình 40

5. a) $y' = 6x - \dfrac{1}{x} + 4\cos x$;

b) $y' = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)\ln 10}$; c) $y' = \dfrac{1-\ln x}{x^2 \ln 3}$.

Bài đọc thêm HÀM SỐ NGƯỢC

Hàm số lôgarit còn được xây dựng theo quan điểm hàm ngược.

Trước hết, ta định nghĩa hàm ngược.

Cho hàm số $f : X \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = f(x)$$

với tập xác định X và tập giá trị Y

$$(Y = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in X : f(x) = y\}).$$

Nếu với mỗi giá trị $y \in Y$, có một và chỉ một $x \in X$ sao cho $f(x) = y$, tức là phương trình $f(x) = y$ với ẩn x có nghiệm duy nhất, bằng cách cho tương ứng mỗi $y \in Y$ với phần tử duy nhất $x \in X$ đó, ta xác định được hàm số

$$g : Y \to \mathbb{R}$$

$$y \mapsto x = g(y)$$

(x thoả mãn $f(x) = y$).

Hàm số g xác định như vậy được gọi là *hàm số ngược* của hàm số f.

Theo thông lệ, người ta thường kí hiệu đối số là x và hàm số là y. Khi đó, hàm số ngược của hàm số $y = f(x)$ sẽ được kí hiệu là $y = g(x)$.

Từ định nghĩa của hàm số ngược suy ra rằng : Tập xác định của hàm số ngược $y = g(x)$ là tập giá trị Y của hàm số $y = f(x)$; tập giá trị của hàm số ngược là tập xác định X của hàm số $y = f(x)$.

Hàm số ngược của hàm số $y = g(x)$ dĩ nhiên lại là hàm số $y = f(x)$. Ta nói $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số ngược của nhau.

Ta có hai định lí sau đây về điều kiện đủ để có hàm số ngược và đồ thị của hai hàm số ngược của nhau.

Định lí 1

Mọi hàm số đồng biến (hay nghịch biến) trên tập xác định của nó đều có hàm số ngược.

Chứng minh. Giả sử hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên tập X và có tập giá trị Y.

Vì Y là tập giá trị nên với mỗi $y \in Y$ có ít nhất $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Ta chứng minh x là duy nhất. Thật vậy, giả sử còn có $x' \in X$ (chẳng hạn $x' \neq x$, $x < x'$) sao cho $y = f(x')$ thì $x < x'$ sẽ kéo theo $f(x) < f(x')$ vì hàm số đồng biến. Do đó $f(x) \neq f(x')$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $f(x) = y = f(x')$. Vậy theo định nghĩa, hàm số $y = f(x)$ có hàm số ngược.

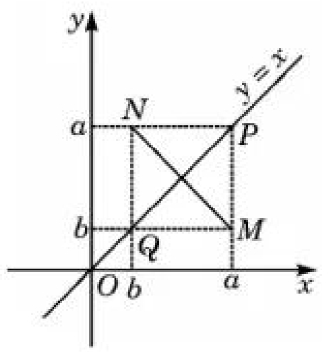
Chứng minh tương tự cho trường hợp hàm số $y = f(x)$ nghịch biến.

Định lí 2

Trong hệ toạ độ Oxy, đồ thị của hai hàm số ngược nhau $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Chứng minh. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có tập xác định X và tập giá trị Y, có hàm số ngược $y = g(x)$ với tập xác định Y và tập giá trị X.

Gọi $M(a; b)$ là một điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Ta có $a \in X$, $b = f(a) \in Y$. Theo định nghĩa của hàm số ngược, nếu $x = b$ thì $g(b) = a$. Do đó, điểm $N(b; a)$ thuộc đồ thị của hàm số ngược $y = g(x)$. Hai điểm M và N đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$ (H.41) vì tứ giác $MPNQ$ là một hình vuông có các đường chéo MN và PQ vuông góc với nhau tại trung điểm của chúng.



Hình 41

Như vậy, mỗi điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đều đối xứng với một điểm thuộc đồ thị của hàm số ngược $y = g(x)$ qua đường thẳng $y = x$. Ngược lại, ta cũng thấy rằng mỗi điểm thuộc đồ thị của hàm số ngược $y = g(x)$ đều đối xứng với một điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = f(x)$ qua đường thẳng $y = x$.

Vậy đồ thị của hai hàm số ngược nhau luôn đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Bây giờ, ta định nghĩa hàm số lôgarit qua hàm số mũ.

Hàm số mũ $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ có các tính chất sau :

• Tập xác định : $\mathbb{R}$.

• Tập giá trị : $(0 ; +\infty)$.

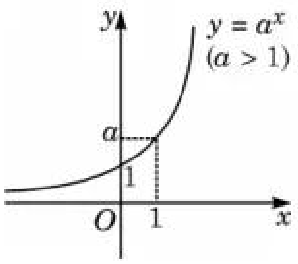
• Khi $a > 1$ hàm số mũ đồng biến, khi $0 < a < 1$ hàm số mũ nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R}$.

• Bảng biến thiên

$a > 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$y = a^x$	0 ↗	1	a	$+\infty$

Đồ thị (H.42).

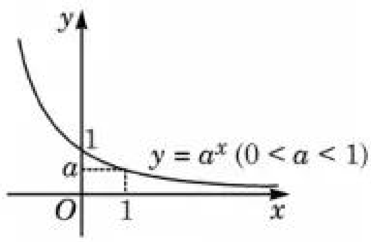


Hình 42

$0 < a < 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$y = a^x$	$+\infty$ ↘	1	a	0

Đồ thị (H.43).



Hình 43

Từ các tính chất trên suy ra hàm số mũ có hàm số ngược.

Định nghĩa

Hàm số ngược của hàm số $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a và được kí hiệu là $y = \log_a x$.

Hàm số $y = \log_a x$ có tập xác định là $(0\ ;\ +\infty)$, tập giá trị là $\mathbb{R}$. Từ bảng biến thiên và đồ thị của hàm số mũ, ta cũng suy ra được bảng biến thiên và đồ thị của hàm số lôgarit khi $a > 1$ và khi $0 < a < 1$.

Ngoài cách định nghĩa hàm số lôgarit là hàm số ngược của hàm số mũ, trong các giáo trình Toán ở bậc Đại học, người ta còn đưa ra định nghĩa sau đây theo quan điểm tích phân.

Định nghĩa. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ liên tục trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$. Với mỗi $x > 0$, ta đặt $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Số $\ln x$ được gọi là lôgarit tự nhiên của số dương x.

Định nghĩa. Giả sử a là một số dương khác 1. Khi đó, $\ln a$ là một số thực khác 0. Với mỗi $x > 0$, ta đặt $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Hàm số $f(x) = \log_a x$ xác định trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$ được gọi là hàm số lôgarit với cơ số a.

Từ định nghĩa lôgarit, người ta chứng minh được các tính chất sau :

1) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ x > 0$;

2) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,\ x > 0,\ y > 0$;

3) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,\ x > 0,\ y > 0$;

4) $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x,\ x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

Theo quan điểm trên, hàm số lôgarit được định nghĩa trước, hàm số mũ được xem là hàm số ngược của hàm số lôgarit.