§ 5 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

1. Biết vận dụng sơ đồ khảo sát hàm số để tiến hành khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số đơn giản và cơ bản nhất trong chương trình toán ở THPT. Đó là các hàm số đa thức, phân thức hữu tỉ quen thuộc.

2. Biết cách phân loại các dạng đồ thị của các hàm số bậc ba, bậc bốn trùng phương, các hàm số phân thức dạng

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'}.$$

Qua đó, có thể phát hiện được những sai sót trong khi vẽ đồ thị như thiếu tính đối xứng qua tâm hoặc qua trục, vị trí của đồ thị đối với các tiệm cận chưa cân xứng, ...

Biết biện luận số nghiệm của một phương trình bằng cách xác định số giao điểm của các đường.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

1. Các hàm số bậc nhất $(y = ax + b,\ a \neq 0)$ và bậc hai $(y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0)$ đã được học kĩ ở các lớp dưới. Tuy nhiên, khi đó ta chỉ sử dụng cách khảo sát và vẽ đồ thị rất "thủ công" bằng cách lấy một số điểm trên đồ thị rồi nối lại...

Ở đây, trong hoạt động $\mathbb{A}_1$, chúng ta muốn cho học sinh thấy lại những kết quả đó bằng cách vận dụng công cụ đạo hàm. Cụ thể là :

* $y = ax + b$.

– Tập xác định : $\mathbb{R}$.

– Chiều biến thiên :

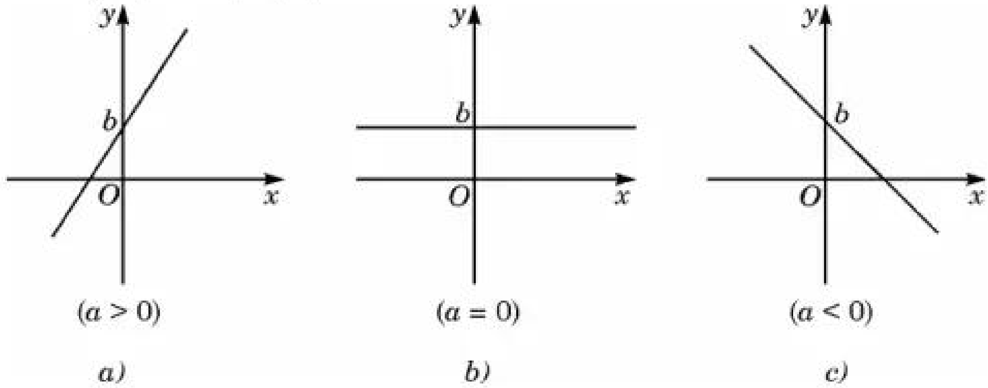
Vì $y' = a$ nên

• Với $a > 0$: hàm số luôn luôn đồng biến.

• Với $a = 0$: hàm số không đổi và bằng b với mọi x.

• Với $a < 0$: hàm số luôn nghịch biến.

– Đồ thị : (H.10 a, b, c).



Hình 10

* $y = ax^2 + bx + c$

Tập xác định : $\mathbb{R}$.

• Với $a = 0$, $b \neq 0$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất ;

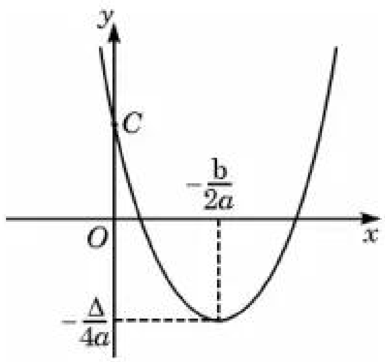
• Với $a \neq 0$:

Chiều biến thiên : $y' = 2ax + b$.

Với $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị : (H.11)

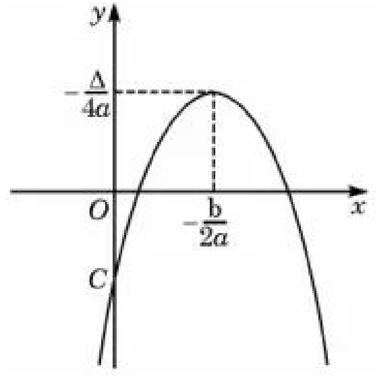


Hình 11

Với $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

– Đồ thị : (H.12).



Hình 12

Đáp án của $_{2}$. Đồ thị của các hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ và $y = x^3 + 3x^2 - 4$ đối xứng với nhau qua trục Oy.

2. Việc nhận xét điểm I là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ giúp vẽ đồ thị thêm chính xác.

Để chứng minh I là tâm đối xứng, ta làm như sau :

Giải phương trình $y'' = 6x + 6 = 0$, ta được $x = -1$. Suy ra $y(-1) = -2$. Vậy $(-1\ ;\ -2)$ là toạ độ của điểm I.

Tịnh tiến hệ toạ độ theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ thì giữa các toạ độ cũ $(x\ ;\ y)$ và toạ độ mới $(X\ ;\ Y)$ của một điểm M trên mặt phẳng có các hệ thức (gọi là công thức đổi trục)

$$\begin{cases} x = -1 + X \\ y = -2 + Y. \end{cases}$$

Thay vào hàm số đã cho, ta được $Y = X^3 - 3X$. Đây là hàm số lẻ. Do đó, đồ thị (C) nhận I làm tâm đối xứng.

3. Từ các lớp dưới, học sinh đã được làm quen với việc tìm toạ độ của giao điểm hai đường, chẳng hạn giải bằng đồ thị hệ phương trình dạng

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Vì vậy, hoạt động $_{6}$ đòi hỏi tìm giao điểm của hai đường nhằm giúp học sinh nhớ lại kiến thức cũ và có thể tự nêu phương pháp chung để giải bài toán này.

Tuỳ đối tượng, có thể thay bài toán trong $_6$ bằng một bài toán dễ hơn. Chẳng hạn, xác định toạ độ giao điểm của hai đường thẳng $y = 2x + 3$ và $y = -x - 5$. Hoặc xác định toạ độ giao điểm của đường thẳng $y = x + 3$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$.

Điểm mới là biện luận theo tham số số nghiệm của một phương trình bằng đồ thị. Ta nêu hai ví dụ về dạng toán này. Ví dụ 7 chứng minh rằng một đường thẳng "xiên" di động luôn luôn cắt hyperbol với mọi giá trị của tham số. Ví dụ 8 đòi hỏi biện luận bằng đồ thị của một đường cong bậc ba và một đường thẳng nằm ngang về số nghiệm của một phương trình.

Nếu có điều kiện, giáo viên nên cho một ví dụ khó hơn. Chẳng hạn, cho biết đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$, hãy biện luận bằng đồ thị số nghiệm của phương trình $m - 3x^2 - x^3 = 0$.

Ở đây phải biến đổi $m - 3x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 2 = m - 2 = k$

rồi biện luận theo k (sau đó mới suy ra kết quả theo m).

Gợi ý $_4$. Số nghiệm của phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 = m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ và đường thẳng $y = m$.

Đáp án của $_6$. Giải phương trình $x^2 + 2x - 3 = -x^2 - x + 2$, ta được hoành độ hai giao điểm là $x = 1$ và $x = -\frac{5}{2}$.

4. Về bài toán viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_o\,;\,y_o)$ nên lưu ý :

Trong phương trình tiếp tuyến

$$y - y_o = f'(x_o)(x - x_o) \qquad (1)$$

của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M(x_o\,;\,y_o)$ thuộc đồ thị, có ba tham số $x_o, y_o, f'(x_o)$. Để viết được phương trình (1), ta phải tính hai tham số còn lại khi cho biết một tham số.

C. BÀI TẬP

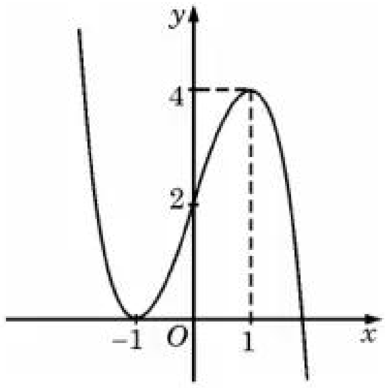
1. a) $y = 2 + 3x - x^3$.

– Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$y' = 3(1 - x^2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

– Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$



Hình 13

– Đồ thị : (H.13).

Chú ý rằng $x = 0$ là nghiệm của phương trình $y'' = 0$. Điểm $I(0\ ;\ 2)$ được gọi là điểm uốn của đồ thị.

b) $y = x^3 + 4x^2 + 4x$.

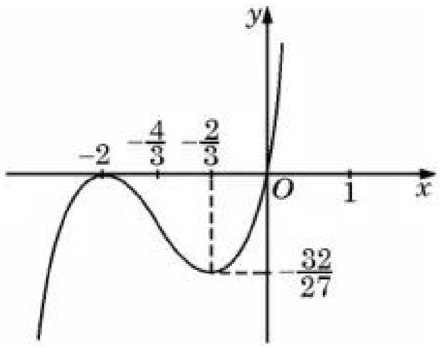
– Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 + 8x + 4,$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3} \\ x = -2. \end{array}\right.$$

– Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$-\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{32}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$



Hình 14

– Đồ thị : (H.14).

c) $y = x^3 + x^2 + 9x$

– Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 + 2x + 9 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số luôn đồng biến và không có cực trị.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$, đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Bạn đọc tự lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị.

d) $y = -2x^3 + 5$.

Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$y' = -6x^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số luôn nghịch biến trên tập xác định và không có cực trị.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$, đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Bạn đọc tự vẽ hình.

2. a) $y = -x^4 + 8x^2 - 1$.

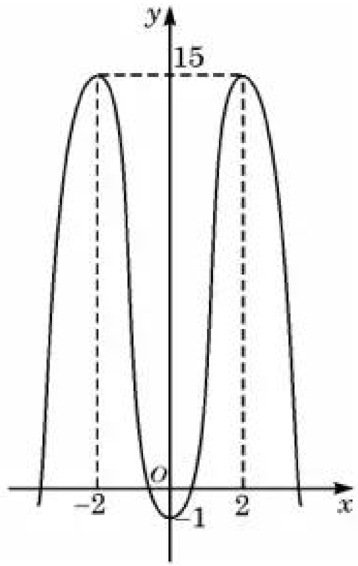
– Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$y' = -4x^3 + 16x = -4x(x^2 - 4)$,

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

– Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	15	$\searrow$	-1	$\nearrow$	15	$\searrow$	$-\infty$



Hình 15

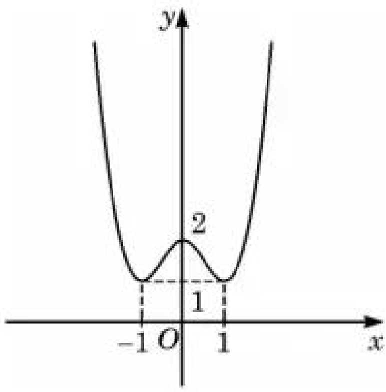
– Đồ thị : (H.15).

b) $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

– Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$,

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$



Hình 16

– Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

– Đồ thị : (H.16).

c) $y = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2}$.

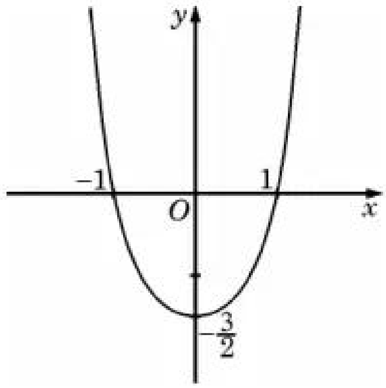
– Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$y' = 2x^3 + 2x = 2x(x^2 + 1)$,

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

– Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



Hình 17

– Đồ thị cắt trục Ox tại $x = \pm 1$ (H.17).

d) $y = -2x^2 - x^4 + 3$.

– Tập xác định : $\mathbb{R}$.

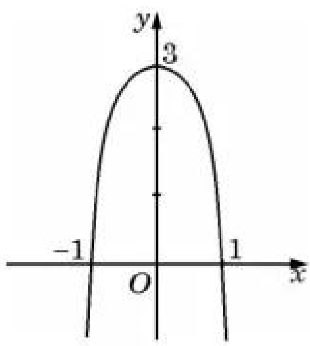
$y' = -4x - 4x^3$,

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

– Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$		$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị cắt trục Ox tại $x = \pm 1$ (H.18).



Hình 18

3. a) $y = \dfrac{x+3}{x-1}$.

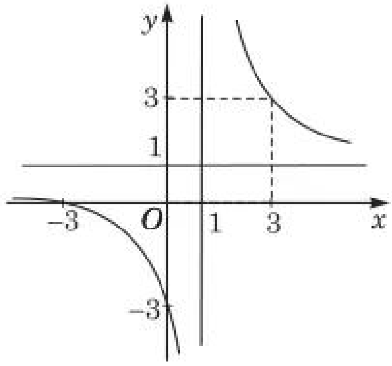
– Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{-4}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1.$$

– Tiệm cận đứng $x = 1$; Tiệm cận ngang $y = 1$.

– Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$1 \searrow$	$-\infty$	||	$+\infty \searrow$	1



Hình 19

– Đồ thị : (H.19).

b) $y = \dfrac{1-2x}{2x-4}$.

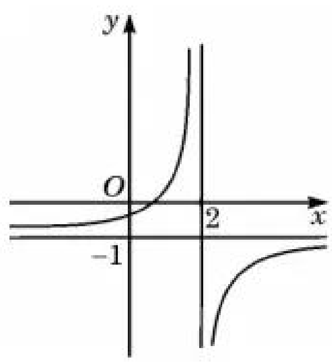
– Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

• $y' = \dfrac{3}{2(x-2)^2} > 0, \ \forall x \neq 2.$

– Tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = -1$.

– Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$-1 \nearrow$	$+\infty$	||	$-\infty \nearrow$	-1



Hình 20

– Đồ thị : (H.20).

c) $y = \dfrac{-x+2}{2x+1}$.

– Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$,

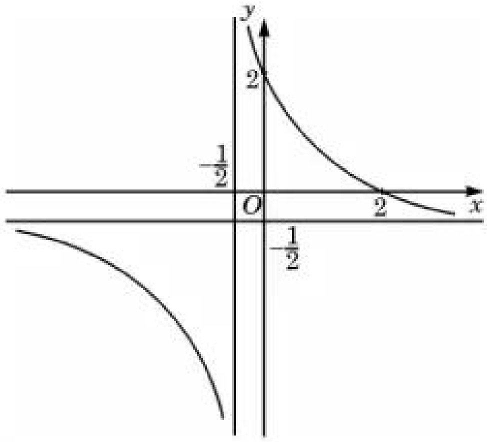
$$y' = \frac{-5}{(2x+1)^2} < 0, \ \forall x \neq -\frac{1}{2}.$$

– Tiệm cận đứng $x = -\frac{1}{2}$,

tiệm cận ngang $y = -\frac{1}{2}$.

– Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$-\frac{1}{2}$ ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$-\frac{1}{2}$



Hình 21

– Đồ thị : (H. 21).

4. Đây là một bài toán mở, có thể giải bằng nhiều cách.

Cách thứ nhất. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ với $f(x)$ là vế trái của phương trình $f(x) = 0$.

a) Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$.

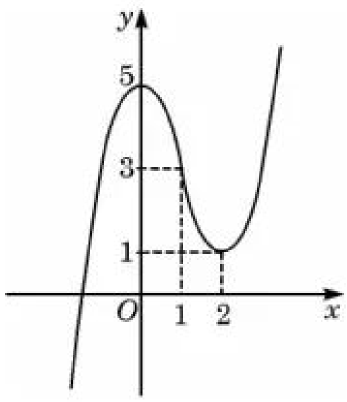
– Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$,

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

– Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$



Hình 22

– Đồ thị : (H.22).

Từ đồ thị ta thấy ngay phương trình $x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ có nghiệm duy nhất.

Cách khác. Chẳng hạn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ rồi tìm hoành độ giao điểm của (C) với đường thẳng $y = -5$.

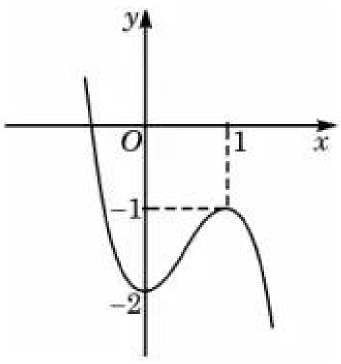
Giáo viên nên khuyến khích học sinh làm theo các cách khác nhau.

b) Xét hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 2$.

– Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$y' = -6x^2 + 6x = -6x(x-1)$,

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$



Hình 23

– Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

– Đồ thị : (H.23).

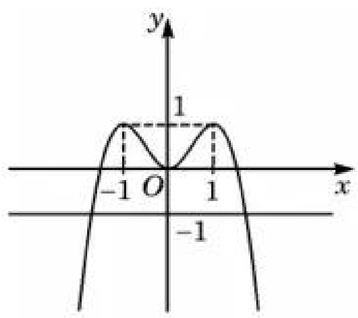
Từ đồ thị ta thấy phương trình $-2x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ chỉ có một nghiệm.

c) Xét hàm số $y = -x^4 + 2x^2$.

– Tập xác định : $\mathbb{R}$.

• $y' = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1)$,

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$



Hình 24

– Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

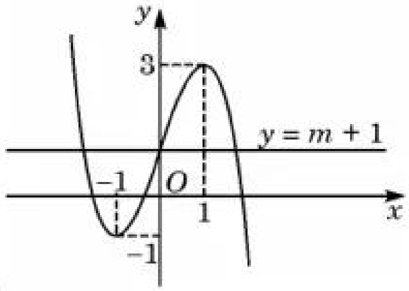
– Đồ thị : (H.24).

Từ đồ thị ta thấy phương trình $-x^4 + 2x^2 = -1$ có hai nghiệm.

5. a) Hàm số $y=-x^3+3x+1$; Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$y' = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$



Hình 25

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị : (H.25).

b) Ta có $x^3-3x+m=0 \Leftrightarrow -x^3+3x+1=m+1$.

Từ đồ thị ta thấy :

$m>2$ hoặc $m<-2$: phương trình có một nghiệm ;

$m=2$ hoặc $m=-2$: phương trình có hai nghiệm ;

$-2<m<2$: phương trình có ba nghiệm.

6. a) $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$.

$y' = \dfrac{m^2+2}{(2x+m)^2} \Rightarrow y' > 0,\ \forall m \in \mathbb{R}$ và $\forall x \neq -\dfrac{m}{2}$.

Do đó, hàm số luôn luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

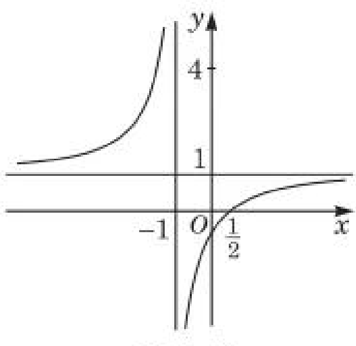
b) Phương trình tiệm cận đứng (Δ) của đồ thị là $x = -\dfrac{m}{2}$. Để (Δ) đi qua $A(-1\,;\sqrt{2})$, ta phải có $-\dfrac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 2$.

c) $y=\dfrac{2x-1}{2x+2}$ $\quad (m = 2)$,

$y' = \dfrac{6}{(2x+2)^2} > 0,\ \forall x \neq -1$.

Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 1$.

Đồ thị : (H.26).



Hình 26

7. $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+m$.

a) Xác định m để đồ thị của hàm số đi qua điểm $(-1\ ;\ 1)$. Ta có $1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+m$

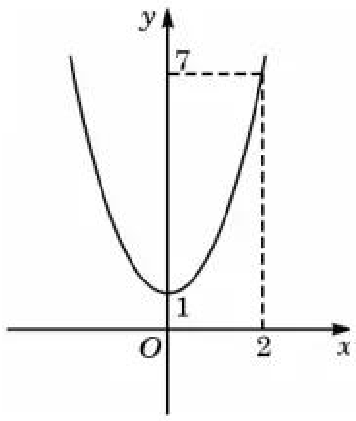
$\Rightarrow m=\frac{1}{4}$.

b) Hàm số $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+1$; Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$y'=x^3+x=x(x^2+1)$; $y'=0 \Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Hình 27

Đồ thị : (H.27).

c) Giải phương trình $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+1=\frac{7}{4}$, ta được $x=\pm 1$. Do đó, có hai điểm có cùng tung độ $\frac{7}{4}$ là $A\left(1\ ;\frac{7}{4}\right)$ và $B\left(-1\ ;\ \frac{7}{4}\right)$.

Ta có $y'(1)=2$ và $y'(-1)=-2$.

Phương trình tiếp tuyến qua A là $y-\frac{7}{4}=y'(1)(x-1)$

$$\Leftrightarrow y=2x-\frac{1}{4}.$$

Phương trình tiếp tuyến qua B là $y-\frac{7}{4}=y'(-1)(x+1)$

$$\Leftrightarrow y=-2x-\frac{1}{4}.$$

8. $y=x^3+(m+3)x^2+1-m$.

a) Ta có

$y'=3x^2+2(m+3)x=x(3x+2m+6)$,

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{2m+6}{3}. \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		$-\dfrac{2m+6}{3}$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Hàm số có cực đại tại $x=-1 \Leftrightarrow -\dfrac{2m+6}{3}=-1 \Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{2}$.

b) (C_m) cắt trục hoành tại $x=-2 \Leftrightarrow -8+4(m+3)+1-m=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{5}{3}$.

9. $y=\dfrac{(m+1)x-2m+1}{x-1}$.

a) Để đồ thị (G) đi qua điểm $(0\,;-1)$, ta phải có

$$-1=\frac{-2m+1}{-1} \Leftrightarrow m=0.$$

b) Hàm số cần tìm là $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (tự khảo sát).

c) Giao điểm của đồ thị với trục tung là $M(0\,;-1)$.

$$y'=\frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(0)=-2.$$

Phương trình tiếp tuyến tại M là $y+1=-2x$ hay $y=-2x-1$.