§5 PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

1. Biết giải các phương trình mũ và phương trình lôgarit cơ bản.

2. Biết phương pháp giải một số phương trình mũ và phương trình lôgarit đơn giản bằng cách đưa về phương trình cơ bản, hoặc giải bằng đồ thị.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

I – PHƯƠNG TRÌNH MŨ

SGK không phát biểu định nghĩa phương trình mũ một cách chính thức. Thay vào đó, SGK giới thiệu khái niệm này thông qua bài toán thực tiễn dẫn đến việc giải phương trình mũ. Cần lưu ý rằng, việc giải bài toán "lãi kép" là ví dụ minh hoạ cho việc tìm nghiệm nguyên của phương trình mũ.

Sau đây, ta có thể xét thêm một phương trình mũ khác, thu được từ bài toán liên quan đến sự phân rã của chất phóng xạ.

"Cho 1 kg chất iôt phóng xạ. Hỏi sau bao lâu sẽ còn lại 10 gam, biết chu kì bán rã của chất này là 192 giờ ?"

Giải. Rõ ràng, ta cần tìm t sao cho $1000\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{192}} = 10$.

Đây là phương trình mũ có nghiệm $t = \frac{384}{\log 2} \approx 1275{,}62$ (giờ).

SGK đưa ra cách giải phương trình mũ cơ bản, sau đó minh hoạ bằng đồ thị.

Việc sử dụng đồ thị để biện luận số nghiệm của phương trình $a^x = b$ có ba ưu điểm sau đây.

1. Học sinh dễ dàng thấy được :

• Nếu $b \le 0$ thì phương trình $a^x = b$ vô nghiệm, vì đồ thị hàm số $y = a^x$ không cắt đường thẳng $y = b$.

• Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$, vì đồ thị các hàm số $y = a^x$ và $y = b$ cắt nhau tại một điểm.

2. Học sinh thấy được một cách trực quan số $\alpha = \log_a b$.

3. Học sinh khẳng định được sự tồn tại $\log_a b$ khi $a > 0$, $a \neq 1$ và $b > 0$, điều mà các em mới chỉ cảm nhận được thông qua các ví dụ cụ thể ở §3.

Đối với học sinh có lực học trung bình, cần luyện tập thêm kĩ năng giải phương trình mũ cơ bản. Chẳng hạn, có thể yêu cầu học sinh giải các phương trình sau đây.

a) $4^{2x-1} = 1$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+1} = 9$.

Đáp số : a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x = -1$.

Việc rèn kĩ năng *giải phương trình mũ cơ bản* cho học sinh là rất cần thiết vì các phương trình mũ khác thường được biến đổi để đưa về phương trình cơ bản.

Có nhiều phương pháp đưa một phương trình mũ về phương trình mũ cơ bản. Tuy nhiên, vì lí do giảm tải và theo yêu cầu của chương trình, SGK chỉ giới thiệu ba phương pháp thường được sử dụng. Một số phương pháp khác được đề cập trong sách Bài tập Giải tích 12 của cùng nhóm tác giả.

Hoạt động $_1$ và Ví dụ 2 minh hoạ cho phương pháp đưa về cùng cơ số. Hoạt động $_2$ và Ví dụ 3 nêu cách đặt ẩn phụ để đưa phương trình mũ về phương trình bậc hai quen thuộc.

Đáp án của hoạt động $_2$:

Đặt $t = 5^x$ $(t > 0)$, ta có phương trình

$$\frac{1}{5}t^2 + 5t - 250 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai này, ta tìm được một nghiệm dương $t = 25$.

Vậy $5^x = 25$ nên $x = 2$.

Đối với học sinh có lực học khá, có thể đưa thêm phương pháp giải phương trình mũ bằng cách áp dụng tính chất của hàm số mũ thông qua ví dụ sau đây.

Giải phương trình $3^x + 4^x = 5^x$.

Ta có phương trình trên tương đương với phương trình

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

Vì $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ nên $x = 2$ là một nghiệm của phương trình. Ta chứng minh đây là nghiệm duy nhất.

Thật vậy, xét hàm số $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$. Ta có *f(x)* nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R}$ vì $f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln\frac{4}{5} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó :

- Với $x < 2$ thì $f(x) > f(2)$ hay $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$;
- Với $x > 2$ thì $f(x) < f(2)$ hay $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < 1$.

Như vậy, phương trình không thể có nghiệm $x < 2$ hoặc $x > 2$.

Vậy phương trình đã cho chỉ có một nghiệm $x = 2$.

II – PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Phần phương trình lôgarit được trình bày tương tự phương trình mũ.

SGK nêu khái niệm phương trình lôgarit là phương trình có chứa ẩn trong biểu thức lấy lôgarit. Đây thực sự là định nghĩa, nhưng SGK không phát biểu một cách chính thức với mục đích không bắt buộc học sinh học thuộc lòng định nghĩa này mà chỉ cần hiểu khái niệm.

Sau khi đưa ra công thức tính nghiệm của phương trình lôgarit cơ bản $\log_a x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$, SGK cũng biểu diễn nghiệm của phương trình là $x = a^b$ trên trục hoành qua việc minh hoạ bằng đồ thị.

Thông thường, khi giải các phương trình lôgarit, người ta đặt điều kiện để phương trình có nghĩa. Sau khi giải phương trình, cần kiểm tra điều kiện để xác định nghiệm. Tuy nhiên, không cần đặt và kiểm tra điều kiện đối với những phương trình lôgarit cơ bản để lời giải ngắn gọn hơn. Chẳng hạn, ta có ngay $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$ vì nghiệm $x = a^b$ luôn dương (theo tính chất của hàm số mũ).

Đối với những phương trình lôgarit phức tạp hơn, nên yêu cầu học sinh đặt điều kiện vì quá trình biến đổi phương trình ban đầu thành phương trình mới có thể dẫn đến phương trình hệ quả.

– *Đáp án của hoạt động* 4 :

$$\log_3 x + \log_9 x = 6 \Leftrightarrow \log_3 x + \log_{3^2} x = 6$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x = 6.$$

Hoạt động này chỉ yêu cầu đưa các lôgarit ở vế trái về cùng một cơ số mà không cần giải phương trình. Tuy nhiên, đối với học sinh có lực học khá, ta có thể yêu cầu các em giải phương trình để được nghiệm.

Đáp án là $\frac{3}{2}\log_3 x = 6 \Leftrightarrow \log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 = 81.$

Hoạt động 5 và Ví dụ 6 minh hoạ cho phương pháp đặt ẩn phụ để đưa một phương trình lôgarit về phương trình bậc hai. Ở Ví dụ 6, ta đã đặt điều kiện đối với ẩn số x và ẩn phụ t vì phương trình mới theo t là phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

– *Đáp án của hoạt động* 5 :

Đặt $t = \log_2 x$ $(x > 0)$, ta có phương trình $t^2 - 3t + 2 = 0$ với hai nghiệm $t_1 = 1, t_2 = 2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 2, x_2 = 4$.

– *Đáp án của hoạt động* 6 :

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_2^2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0.$$

Đặt $t = \log_2 x$ $(x > 0)$, ta có phương trình bậc hai theo t là $t^2 - t - 2 = 0$.

Giải ra, ta được hai nghiệm $t_1 = -1, t_2 = 2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 2^{-1} = \frac{1}{2}, x_2 = 2^2 = 4.$

Chương trình yêu cầu không xét các phương trình mũ và phương trình lôgarit có chứa tham số hoặc có chứa ẩn ở cơ số. Đây là một trong những nội dung giảm tải của chương trình mới. Lí do là các phương trình đó giải rất phức tạp và cũng không đưa đến cho học sinh những tư duy mới mẻ cần thiết. Vì vậy, sách giáo khoa chỉ xét những phương trình mũ và phương trình lôgarit đơn giản. Tuỳ theo đối tượng học sinh, có thể thêm bớt các phương trình dạng khác. Tuy nhiên, không nên khai thác các phương trình quá khó, không cần thiết đối với trình độ học sinh THPT.

C. BÀI TẬP

1. a) $(0,3)^{3x-2} = (0,3)^0$ nên $3x - 2 = 0$. Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{2}{3}$.

b) $5^{-x} = 5^2$. Vậy nghiệm của phương trình là $x = -2$.

c) $2^{x^2-3x+2} = 2^2$ nên $x^2 - 3x + 2 = 2$. Vậy $x = 0$, $x = 3$ là các nghiệm.

d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+7+1-2x} = 2$ hay $2^{x-8} = 2^1$. Vậy nghiệm của phương trình là $x = 9$.

2. a) Ta có $\dfrac{1}{3}.3^{2x} + 3^{2x} = 108$ nên $3^{2x} = 81$. Từ đó suy ra $x = 2$.

b) Ta có $2.2^x + \dfrac{1}{2}.2^x + 2^x = 28$ nên $2^x = 8$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 3$.

c) Đặt $t = 8^x$ $(t > 0)$, ta có phương trình $t^2 - t - 56 = 0$.

Giải phương trình này, ta tìm được một nghiệm $t = 8$ thoả mãn điều kiện $t > 0$, tức là $8^x = 8$.

Vậy $x = 1$ là nghiệm.

d) Chia hai vế của phương trình cho 9^x $(9^x > 0)$, ta được

$$3\left(\frac{4}{9}\right)^x - 2\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1.$$

Đặt $t = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ $(t > 0)$, ta có phương trình bậc hai $3t^2 - 2t - 1 = 0$.

Phương trình này chỉ có một nghiệm dương $t = 1$, tức là $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$.

Vậy $x = 0$ là nghiệm.

3. a) Với điều kiện $5x + 3 > 0$ và $7x + 5 > 0$, tức là $x > -\frac{3}{5}$, ta có phương trình

$5x + 3 = 7x + 5$.

Giải phương trình này, ta được $x = -1$ không thoả mãn điều kiện $x > -\frac{3}{5}$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Với điều kiện $x > \frac{11}{2}$, ta có phương trình $\log\frac{x-1}{2x-11} = \log 2$.

Từ đó $\frac{x-1}{2x-11} = 2$ hay $x - 1 = 4x - 22$.

Vậy $x = 7$ (thoả mãn $x > \frac{11}{2}$) là nghiệm của phương trình đã cho.

c) Với điều kiện $x > 5$, ta có

$$\log_2[(x-5)(x+2)] = 3 \quad \text{hay}\ (x-5)(x+2) = 8.$$

Giải phương trình bậc hai này, ta tìm được nghiệm $x = 6$ thoả mãn điều kiện trên.

d) Phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 7 = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy $x = 5$ là nghiệm.

4. a) Phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 + x - 5 > 0 \\ 5x > 0 \\ \frac{1}{2}\log(x^2 + x - 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 5 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 + x - 5 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{\sqrt{21} - 1}{2} \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{\sqrt{21} - 1}{2} \\ x = -3 \text{ hoặc } x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy $x = 2$ là nghiệm.

b) Tương tự, ta có hệ

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 1 > 0 \\ x > 0 \\ \log(x^2 - 4x - 1) = 2\log\dfrac{8x}{4x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 1 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 - 4x - 1 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 + \sqrt{5} \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 + \sqrt{5} \\ x = -1 \text{ hoặc } x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

c) Với điều kiện $x > 0$, phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$\log_{2^{\frac{1}{2}}} x + 4\log_{2^2} x + \log_{2^3} x = 13$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2 x + 2\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 13$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 3.$$

Vậy $x = 8$ là nghiệm.