§6 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

1. Biết giải các bất phương trình mũ, bất phương trình lôgarit cơ bản.

2. Biết phương pháp giải một số bất phương trình mũ và bất phương trình lôgarit đơn giản.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

SGK không nêu khái niệm bất phương trình mũ và bất phương trình lôgarit. Ta hiểu đó là các bất phương trình có chứa ẩn ở số mũ của luỹ thừa hoặc trong biểu thức lấy lôgarit.

Cũng như đối với các phương trình ở §5, khi giải các bất phương trình mũ và bất phương trình lôgarit cơ bản, SGK chú trọng đến việc minh hoạ bằng đồ thị. Lí do là phương pháp đồ thị giúp học sinh hình dung một cách trực quan tập hợp nghiệm của bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm đó trên trục số. Ngoài ra, qua đồ thị, học sinh nắm vững được các trường hợp bất phương trình luôn nghiệm đúng hoặc vô nghiệm mà không cần ghi nhớ một cách máy móc các kết quả trong bảng.

Sau hoạt động ${}_1$, ${}_3$ nên yêu cầu học sinh giải cụ thể một vài bất phương trình mũ và bất phương trình lôgarit cơ bản để rèn luyện kĩ năng. Chẳng hạn, có thể yêu cầu học sinh chỉ ra tập hợp nghiệm của các bất phương trình sau :

a) $2^{x-1} \leq \frac{1}{2}$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > -3$; c) $(0,4)^x < -1$.

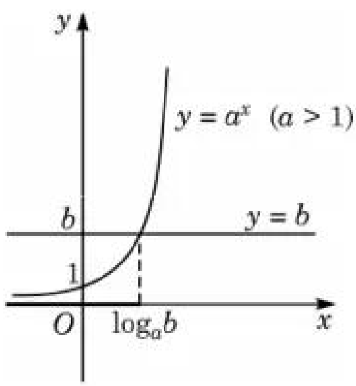
Đáp số : a) $(-\infty ; 0]$; b) $\mathbb{R}$; c) $\varnothing$.

– *Đáp án của hoạt động* ${}_1$:

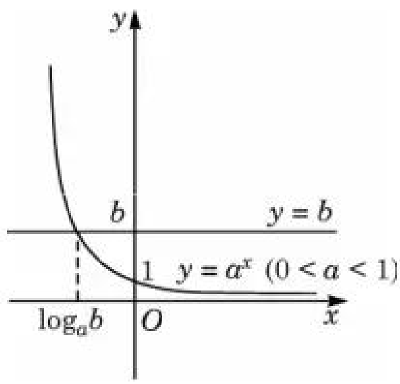
Từ đồ thị ở hai hình 41 và 42 của SGK, ta có bảng tóm tắt tập nghiệm của bất phương trình $a^x \geq b$ như sau :

$a^x \geq b$	*Tập nghiệm*	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$b \leq 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$b > 0$	$[\log_a b ; +\infty)$	$(-\infty ; \log_a b]$

Giáo viên nên vẽ tập hợp nghiệm trên trục hoành bằng phấn màu.



Hình 44



Hình 45

Từ đồ thị ở các hình 44 và 45, ta có hai bảng sau đây.

$a^x < b$	*Tập nghiệm*	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$b \leq 0$	$\varnothing$	$\varnothing$
$b > 0$	$(-\infty\ ;\ \log_a b)$	$(\log_a b\ ;\ +\infty)$

$a^x \leq b$	*Tập nghiệm*	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$b \leq 0$	$\varnothing$	$\varnothing$
$b > 0$	$(-\infty\ ;\ \log_a b]$	$[\log_a b\ ;\ +\infty)$

– *Đáp án của hoạt động* $_2$:

Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$, ta có bất phương trình $\quad t + \dfrac{1}{t} - 3 < 0$

hay $\dfrac{t^2 - 3t + 1}{t} < 0$.

Với điều kiện $t > 0$, ta có $t^2 - 3t + 1 < 0$

hay $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < t < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Từ đó suy ra $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 2^x < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Vì cơ số 2 lớn hơn 1 nên

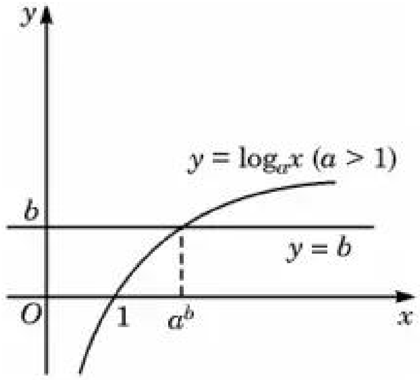
$$\log_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \log_2 \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

hay $\log_2(3-\sqrt{5}) - 1 < x < \log_2(3+\sqrt{5}) - 1$.

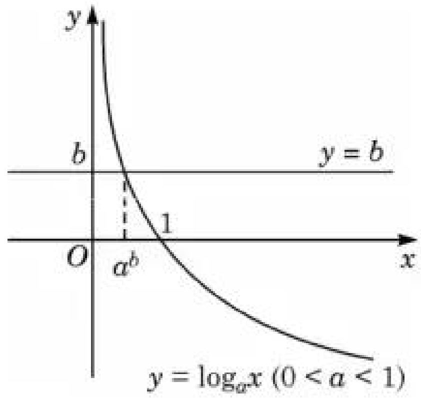
– *Đáp án của hoạt động* $_3$:

Từ đồ thị ở hai hình 43 và 44 của SGK, ta có bảng sau đây.

$\boldsymbol{\log_a x \geq b}$	$\boldsymbol{a > 1}$	$\boldsymbol{0 < a < 1}$
Tập nghiệm	$[a^b\ ;\ +\infty)$	$(0\ ;\ a^b]$



Hình 46



Hình 47

Từ đồ thị ở hai hình 46 và 47, ta có hai bảng sau đây.

$\log_a x < b$	$a > 1$	$0 < a < 1$
Tập nghiệm	$(0\,;\,a^b)$	$(a^b\,;\,+\infty)$

$\log_a x \le b$	$a > 1$	$0 < a < 1$
Tập nghiệm	$(0\,;\,a^b]$	$[a^b\,;\,+\infty)$

Có thể lập bảng tóm tắt nghiệm của các bất phương trình trên như trong SGK.

– *Đáp án của hoạt động* 4 :

Vì cơ số $\frac{1}{2}$ nhỏ hơn 1 nên bất phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} 2x+3>0 \\ 2x+3<3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{3}{2} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

C. BÀI TẬP

1. a) Ta có $2^{-x^2+3x} < 2^2 \Leftrightarrow -x^2+3x<2 \Leftrightarrow x^2-3x+2>0$.

Vậy $x < 1$ hoặc $x > 2$.

b) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \ge \left(\frac{7}{9}\right)^{-1}$ nên $2x^2-3x \le -1$ hay $2x^2-3x+1 \le 0$.

Vậy $\frac{1}{2} \le x \le 1$.

c) $9.3^x + \frac{1}{3}.3^x \leq 28$ hay $3^x \leq 3$.

Vậy $x \leq 1$.

d) Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$, ta có bất phương trình $t^2 - 3t + 2 > 0$

$\Leftrightarrow$ $0 < t < 1$ hoặc $t > 2$ $\Leftrightarrow 2^x < 1$ hoặc $2^x > 2$ $\Leftrightarrow$ $x < 0$ hoặc $x > 1$.

2. a) Bất phương trình đã cho tương đương với $4 - 2x \geq 64$.

(Khi đó, $4 - 2x > 0$ nên lôgarit của nó xác định).

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq -30$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} 3x - 5 > 0 \\ 3x - 5 < x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{3} \\ x < 3. \end{cases}$$

Vậy $\frac{5}{3} < x < 3$.

c) Vì $\log_5(x-2) = -\log_{\frac{1}{5}}(x-2) = -\log_{0,2}(x-2)$

nên bất phương trình đã cho tương đương với hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x > 2 \\ \log_{0,2} x + \log_{0,2}(x-2) < \log_{0,2} 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \log_{0,2}\left[x(x-2)\right] < \log_{0,2} 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x(x-2) > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -1 \text{ hoặc } x > 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x > 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(3\,;+\infty)$.

d) Đặt $t = \log_3 x$ $(x > 0)$, ta có bất phương trình $t^2 - 5t + 6 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 2 \leq t \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq \log_3 x \leq 3 \Leftrightarrow 9 \leq x \leq 27.$$