ÔN TẬP CHƯƠNG I

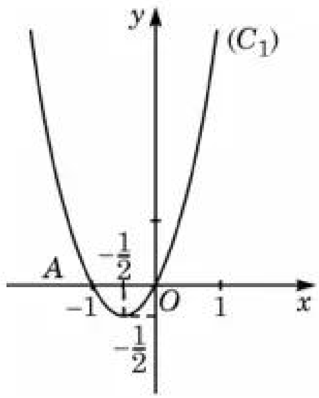
5. $y = 2x^2 + 2mx + m - 1$.

a) Khảo sát hàm số : $y = 2x^2 + 2x$, $y' = 4x + 2$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị đi qua $O(0 ; 0)$, $A(-1 ; 0)$ (H.28).



Hình 28

b) Ta có $y' = 4x + 2m,$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{m}{2}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{m}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

i) Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-1\ ;+\infty)$ thì phải có $-\dfrac{m}{2} \le -1 \Leftrightarrow m \ge 2$.

ii) Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có cực trị trên khoảng $(-1\ ;+\infty)$ thì đạo hàm phải đổi dấu trên khoảng đó. Do đó $-\dfrac{m}{2} > -1 \Leftrightarrow m < 2.$

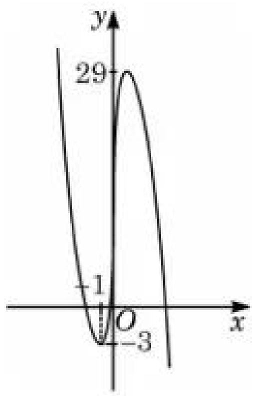
c) Giao điểm với trục hoành :

$$2x^2 + 2mx + m - 1 = 0,$$

$$\Delta' = m^2 - 2m + 2 = (m-1)^2 + 1 > 0,\ \ \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy (C_m) luôn cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt.

6. a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2.$ (1)



Hình 29

Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3),$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	29	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị : (H.29)

b) Ta có $f'(x-1) = -3(x-1)^2 + 6(x-1) + 9$

$$= -3x^2 + 12x \ ;$$

$f'(x-1) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4.$

c) $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9,$

$f''(x) = -6x + 6,$

$f''(x_0) = -6 \Leftrightarrow -6x_0 + 6 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 2.$

$$f(2) = 24 \ ; \ f'(2) = 9.$$

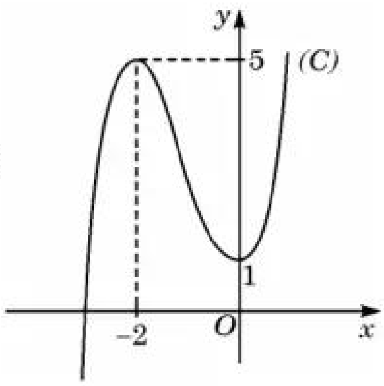
Vậy phương trình tiếp tuyến tại $x_0 = 2$ là

$$y = 9(x-2) + 24 \text{ hay } y = 9x + 6.$$

7. a) $y = x^3 + 3x^2 + 1$. Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 + 6x,\ y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \ ; \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Hình 30

Đồ thị : (H.30).

b) Số nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 + 1 = \dfrac{m}{2}$ là số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d) có phương trình $y = \dfrac{m}{2}$.

- $\dfrac{m}{2} < 1 \Leftrightarrow m < 2$: (d) cắt (C) tại một điểm nên phương trình có một nghiệm.
- $\dfrac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 2$: (d) cắt (C) tại hai điểm nên phương trình có hai nghiệm.
- $1 < \dfrac{m}{2} < 5 \Leftrightarrow 2 < m < 10$: (d) cắt (C) tại ba điểm nên phương trình có ba nghiệm.
- $\dfrac{m}{2} = 5 \Leftrightarrow m = 10$: (d) cắt (C) tại hai điểm nên phương trình có hai nghiệm.
- $\dfrac{m}{2} > 5 \Leftrightarrow m > 10$: (d) cắt (C) tại một điểm nên phương trình có một nghiệm.

Như vậy $\left[\begin{array}{l} m>10 \\ m<2 \end{array}\right.$: phương trình có một nghiệm ;

$m=2,\ m=10$: phương trình có hai nghiệm ;

$2<m<10$: phương trình có ba nghiệm.

c) Điểm cực đại $A(-2\ ;\ 5)$, điểm cực tiểu $B(0\ ;\ 1)$. Đường thẳng qua A, B có phương trình là

$$\frac{y-1}{4}=\frac{x}{-2} \Leftrightarrow y=-2x+1.$$

8. $y=f(x)=x^3-3mx^2+3(2m-1)x+1$.

Tập xác định : $\mathbb{R}$.

a) $y'=3x^2-6mx+3(2m-1)=3(x^2-2mx+2m-1)$.

Để hàm số đồng biến trên tập xác định thì $y'\geq 0$ với mọi x.

$$\Leftrightarrow m^2-2m+1\leq 0 \Leftrightarrow m=1.$$

b) Để hàm số có một cực đại và một cực tiểu thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (m-1)^2>0 \Leftrightarrow m\neq 1$.

c) $y'=f'(x)=3x^2-6mx+3(2m-1)$,

$y''=f''(x)=6x-6m$,

$f''(x)>6x \Leftrightarrow 6x-6m>6x \Leftrightarrow m<0$.

9. a) $y=f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$.

Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$y'=2x^3-6x=2x(x^2-3)$;

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3}\ ; \end{array}\right.$ $f(0)=\frac{3}{2}$; $f(\pm\sqrt{3})=-3$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị : (H.31).

b) $f''(x) = 6x^2 - 6$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

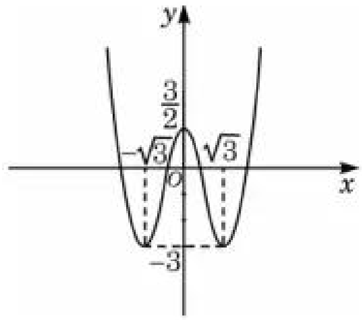
$f(\pm 1) = -1$.

Tiếp tuyến tại điểm $(1 ; -1)$ có phương trình là

$$y = -4x + 3.$$

Tiếp tuyến tại điểm $(-1 ; -1)$ có phương trình là

$$y = 4x + 3.$$



Hình 31

c) $x^4 - 6x^2 + 3 = m \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} = \frac{m}{2}$. (1)

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị các hàm số :

$$y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} \quad \text{và} \quad y = \frac{m}{2}.$$

Từ đó ta có :

- $\frac{m}{2} < -3 \Leftrightarrow m < -6$: phương trình vô nghiệm ;
- $\frac{m}{2} = -3 \Leftrightarrow m = -6$: phương trình có 2 nghiệm ;
- $-3 < \frac{m}{2} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -6 < m < 3$: phương trình có 4 nghiệm ;
- $\frac{m}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow m = 3$: phương trình có 3 nghiệm ;
- $\frac{m}{2} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow m > 3$: phương trình có 2 nghiệm.

10. $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$.

a) Ta có :

$y' = -4x^3 + 4mx = -4x(x^2 - m)$.

$m \le 0$: Hàm số có một cực đại (tại $x = 0$) ;

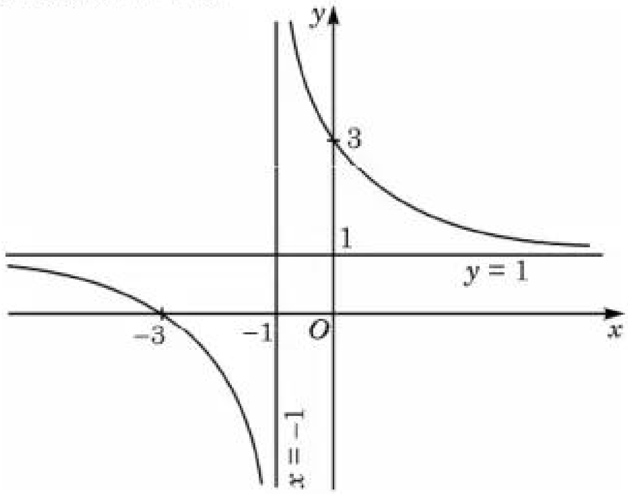
$m > 0$: Hàm số có hai cực đại (tại $x = \pm\sqrt{m}$) và một cực tiểu (tại $x = 0$).

b) Phương trình $-x^4+2mx^2-2m+1=0$ có nghiệm $x=\pm 1$ với mọi m. Do đó, với mọi m, (C_m) luôn cắt trục hoành.

c) $y' = -4x(x^2-m)$.

Do đó, để (C_m) có cực đại và cực tiểu thì $m>0$.

11. a) $y=\dfrac{x+3}{x+1}$.



Hình 32

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$
- Đạo hàm : $y' = -\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

$y'<0, \forall x \in D$ nên hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

- Giới hạn

$\lim\limits_{x\to -1^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^-} y = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to -\infty} y = \lim\limits_{x\to +\infty} y = 1$.

Đồ thị có tiệm cận ngang $y=1$, tiệm cận đứng $x=-1$.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$1 \searrow$	$-\infty$	‖	$+\infty \searrow$	1

- Đồ thị : (H.32).

b) Ta có hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=2x+m$ với đồ thị *(C)* là nghiệm của phương trình

$$\frac{x+3}{x+1}=2x+m$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2+(m+1)x+m-3=0,\ x\neq -1. \qquad (*)$$

Rõ ràng $x=-1$ không là nghiệm của phương trình (*) và biệt số

$$\Delta=(m+1)^2-8(m-3)=(m-3)^2+16>0,\ \forall m.$$

Do đó, phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt khác -1.

Vậy đường thẳng $y = 2x + m$ luôn cắt *(C)* tại hai điểm phân biệt M và N.

c) Ta có các hoành độ x_M, x_N lần lượt của các điểm M, N là hai nghiệm phân biệt của phương trình (*) nên theo định lí Vi-ét :

$$x_M + x_N = -\frac{m+1}{2}, \qquad x_M x_N = \frac{m-3}{2}.$$

Độ dài MN nhỏ nhất khi và chỉ khi MN^2 nhỏ nhất.

Ta có $MN^2 = (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2$

$$= (x_M - x_N)^2 + \left[(2x_M + m) - (2x_N + m)\right]^2$$

$$= 5(x_M - x_N)^2 = 5\left[(x_M + x_N)^2 - 4x_M x_N\right]$$

$$= 5\left[\left(-\frac{m+1}{2}\right)^2 - 4.\frac{m-3}{2}\right] = \frac{5}{4}\left[m^2 - 6m + 25\right]$$

$$= \frac{5}{4}\left[(m-3)^2 + 16\right] \geq \frac{5}{4}\cdot 16 = 20$$

hay $MN \geq 2\sqrt{5}$ (*)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m - 3 = 0$ hay $m = 3$.

Khi đó, độ dài nhỏ nhất của MN là $2\sqrt{5}$.

d) Giả sử $S(x_0\,;\,y_0)$ là điểm bất kì thuộc *(C)*. Ta có phương trình tiếp tuyến *(T)* của *(C)* tại S là

$$y - y_0 = -\frac{2}{(x_0+1)^2}(x - x_0),$$

trong đó $y_0 = 1 + \dfrac{2}{x_0 + 1}$.

Giao điểm của *(T)* với tiệm cận ngang là điểm $P(2x_0 + 1\,;\,1)$.

Giao điểm của *(T)* với tiệm cận đứng là điểm $Q\left(-1\,;\,y_0 + \dfrac{2}{x_0+1}\right)$.

Rõ ràng $x_S = \dfrac{x_P + x_Q}{2}$, $y_S = \dfrac{y_P + y_Q}{2}$ nên S là trung điểm của PQ.

12. a) Ta có $f'(x) = x^2 - x - 4$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Cả hai giá trị này của x đều nằm ngoài đoạn $[-1 ; 1]$. Suy ra phương trình $f'(\sin x) = 0$ vô nghiệm.

b) Ta có $f''(x) = 2x - 1$, do đó $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra phương trình $f''(\cos x) = 0 \quad \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Theo câu b), nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$ là $x = \dfrac{1}{2}$.

Ta có $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{17}{4}$ và $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{47}{12}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm có dạng

$$y = -\frac{17}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{47}{12} \quad \text{hay} \quad y = -\frac{17}{4}x + \frac{145}{24}.$$

Đáp án bài tập trắc nghiệm

1. (B). **2.** (A). **3.** (B). **4.** (C). **5.** (B).