ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN

ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. $ax^2 - 2(a+1)x + a + 2 = 0$ $(a \neq 0)$.

a) Vì tổng các hệ số của phương trình bằng 0 và $a \neq 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm thực là

$$x_1 = 1\,;\; x_2 = 1 + \frac{2}{a}.$$

b) $S = x_1 + x_2 = 2 + \dfrac{2}{a}$;

$P = x_1x_2 = 1 + \dfrac{2}{a}$.

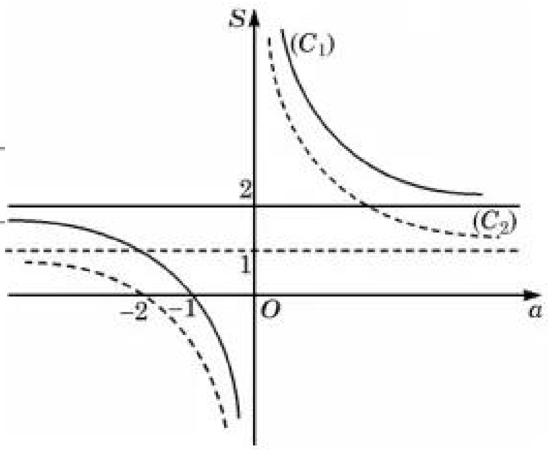
Rõ ràng $P = S - 1$.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của $S = 2 + \dfrac{2}{a}$;

Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$S' = -\dfrac{2}{a^2} < 0,\ \forall a \neq 0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty\,;0)$ và $(0\,;+\infty)$.

a	$-\infty$	0	$+\infty$
S'	$-$	‖	$-$
S	$2 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 2$



Hình 70

Tiệm cận đứng $a = 0$;

Tiệm cận ngang $S = 2$.

Giao với Oa : $S = 0 \Rightarrow a = -1$.

Đồ thị của S là (C_1) (Hình 70 nét liền).

Tịnh tiến đồ thị (C_1) song song với trục tung xuống dưới một đơn vị, ta được đồ thị (C_2) của P (Hình 70 nét đứt).

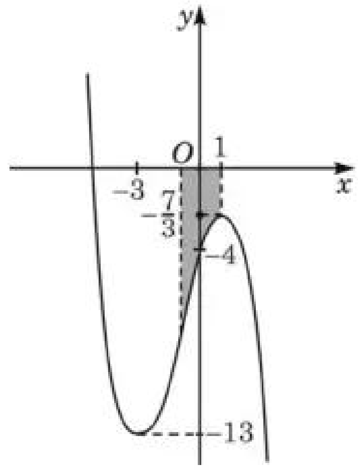
2. $y = -\frac{1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + (a+3)x - 4$.

a) Khi $a = 0$

$y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4$.

Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$y' = -x^2 - 2x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$;



Hình 71

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-13	$\nearrow$	$-\frac{7}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị : (H.71).

b) Vì tích phân từ $-a$ đến a của hàm lẻ bằng $0^{(*)}$ nên :

$$S = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 4\right)dx = \int_{-1}^{1}(x^2 + 4)dx$$

$$= 2\int_{0}^{1}(x^2 + 4)dx = 2\left(\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{26}{3}.$$

(*) Nhờ đổi biến số $x = -t$, ta chứng minh được

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & \text{nếu } f \text{ là hàm số chẵn} \\ 0, & \text{nếu } f \text{ là hàm số lẻ.} \end{cases}$$

3. a) Để đồ thị của hàm số đi qua hai điểm $A(1\ ;\ 2)$ và $B(-2\ ;\ -1)$, ta phải có

$$\begin{cases} 2 = 1 + a + b + 1 \\ -1 = -8 + 4a - 2b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1. \end{cases}$$

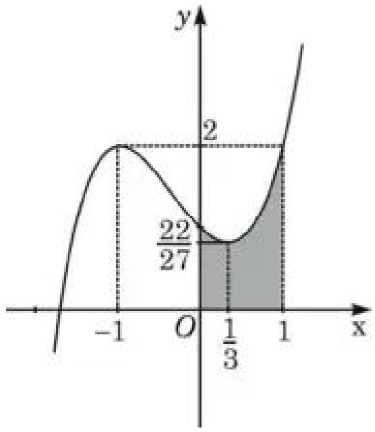
b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = x^3 + x^2 - x + 1,$$

$$y' = 3x^2 + 2x - 1,\quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{22}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$



Hình 72

Đồ thị : (H.72).

c) $V = \pi\int\limits_0^1 (x^3 + x^2 - x + 1)^2 \mathrm{d}x$

$$= \pi\int\limits_0^1 (x^6 + 2x^5 - x^4 + 3x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x$$

$$= \pi\left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^5}{5} + x^3 - x^2 + x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{134\pi}{105}.$$

4. $s(t) = \dfrac{t^4}{4} - t^3 + \dfrac{t^2}{2} - 3t$. Vận tốc và gia tốc lần lượt là :

$$v(t) = t^3 - 3t^2 + t - 3\ ;\ a(t) = 3t^2 - 6t + 1.$$

Từ đó $v(2) = -5$; $a(2) = 1$.

b) Ta có $v(t) = t^3 - 3t^2 + t - 3 = (t^2 + 1)(t - 3)$, nên $v(t) = 0$ khi $t = 3$.

5. a) $y = x^4 + ax^2 + b$; $y' = 4x^3 + 2ax$;

a và b phải thoả mãn $\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y(1) = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2a = 0 \\ a + b = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

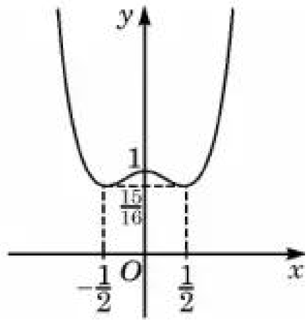
b) $y = x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + 1.$

Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - x = x(4x^2 - 1)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{15}{16}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{15}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$



Hình 73

Đồ thị : (H.73).

c) $y_0 = f(x_0) = 1 \Leftrightarrow x_0^4 - \dfrac{1}{2}x_0^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x_0^4 - \dfrac{1}{2}x_0^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x_0^2\left(x_0^2 - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Do đó, ba tiếp điểm là $(0 ; 1)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} ; 1\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} ; 1\right)$.

Vậy ta có các phương trình tiếp tuyến sau :

- $y = 1$;
- $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1$ hay $y = \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}$;
- $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1$ hay $y = -\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}$.

6. $y = \dfrac{x-2}{x+m-1}$.

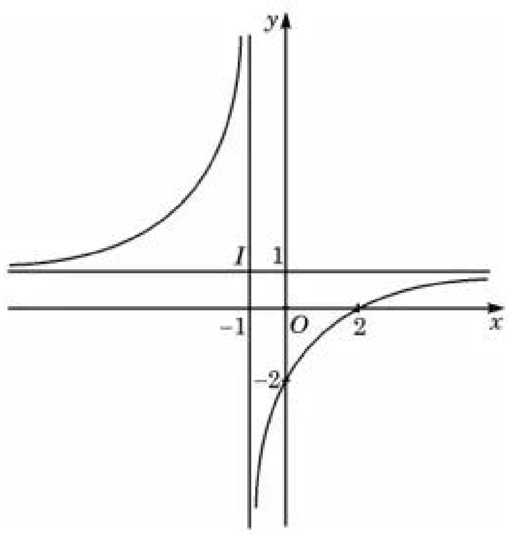
a) $m = 2 \Rightarrow y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$y' = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty ; -1)$, $(-1 ; +\infty)$. Hàm số không có cực trị.

Hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	1 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1



Hình 74

Giao điểm với trục Ox tại $(2 ; 0)$;

Giao điểm với trục Oy tại $(0 ; -2)$.

Đồ thị : H. 74.

b) Điểm $M\left(a ; \dfrac{a-2}{a+1}\right)$, $a \neq -1$;

$$f'(a) = \frac{3}{(a+1)^2}.$$

Phương trình tiếp tuyến d có dạng

$$y = \frac{3}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{a-2}{a+1}.$$

7. Cho $y = \dfrac{2}{2-x}$.

a) Bạn đọc tự khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Hoành độ giao điểm của (C) với đồ thị hàm số $y = x^2 + 1$ là nghiệm của phương trình :

$$\frac{2}{2-x} = x^2 + 1 \Leftrightarrow 2 = (x^2+1)(2-x) \text{ với } x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x(-x^2 + 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1; \end{array}\right.$$

Ta có $f'(x) = \dfrac{2}{(2-x)^2}$.

- $x = 0 \Rightarrow y = 1$ và $f'(0) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến có dạng

$$y = \frac{1}{2}x + 1 ;$$

- $x = 1 \Rightarrow y = 2$ và $f'(1) = 2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến có dạng

$$y = 2(x-1) + 2 \text{ hay } y = 2x.$$

c) $V = \pi\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{2}{2-x}\right)^2 \mathrm{d}x = 4\pi\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)^2}$

$$= 4\pi \left.\frac{1}{2-x}\right|_0^1 = 4\pi\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2\pi.$$

8. a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ trên đoạn $\left[-2 ; \dfrac{5}{2}\right]$.

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2\ ; \end{array}\right.$$

Ta có $f(-1) = 8$, $f(2) = -19$, $f(-2) = -3$, $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{33}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $f(2) = -19$;

Giá trị lớn nhất là $f(-1) = 8$.

b) $f(x) = x^2 \ln x$ trên đoạn $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.

Ta có $f'(x) = 2x\ln x + x$;

$f'(x) > 0, \forall x \in [1\ ;\ \mathrm{e}]$ nên *f(x)* đồng biến.

Do đó, giá trị nhỏ nhất là $f(1) = 0$; giá trị lớn nhất là $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^2$.

c) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ trên $[0\ ;\ +\infty)$.

$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1 - x)$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có $f(0) = 0$, $f(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất là $f(0) = 0$; giá trị lớn nhất là $f(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

d) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0\ ;\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

$f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 2(\cos x + 2\cos^2 x - 1)$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi \\ x = \dfrac{\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Ta có $f(0) = f(\pi) = 0$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$; Giá trị lớn nhất là $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

9. a) Đặt $t = 13^x$ $(t > 0)$, ta có phương trình $13t^2 - t - 12 = 0$. Giải phương trình này, ta tìm được một nghiệm $t = 1$ thoả mãn điều kiện $t > 0$.

Do đó, phương trình đã cho tương đương với phương trình $13^x = 1$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 0$.

b) Chia hai vế của phương trình cho 6^x $(6^x > 0)$, ta được

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1\right].\left[1 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^x\right] = 8.$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ $(t > 0)$, ta có phương trình $(t + 1)(1 + \frac{3}{t}) = 8$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm dương $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 0$, $x_2 = \log_{\frac{3}{2}} 3$.

c) Với điều kiện $x > 2$, ta có phương trình

$$2\log_3(x-2).\log_5 x = 2\log_3(x-2)$$
$$\Leftrightarrow \log_3(x-2).\left(\log_5 x - 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3(x-2) = 0\\ \log_5 x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 3\\ x = 5.\end{array}\right.$$

(Cả hai nghiệm đều thoả mãn điều kiện).

d) Với điều kiện $x > 0$, đặt $t = \log_2 x$, ta có phương trình $t^2 - 5t + 6 = 0$.

Giải phương trình này, ta tìm được hai nghiệm $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. Từ đó suy ra hai nghiệm tương ứng của phương trình đã cho là $x_1 = 4$, $x_2 = 8$.

10. a) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}\geq 0.$$

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ $(t>0)$, ta có bất phương trình $\dfrac{2t-3}{t-1}\geq 0$

$$\Leftrightarrow 0<t<1 \text{ hoặc } t\geq\frac{3}{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x<0$ hoặc $x\geq 1$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} x^2-1>0 \\ \log_2(x^2-1)<0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1<1\end{cases}\Leftrightarrow 1<x^2<2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}<x<-1 \text{ hoặc } 1<x<\sqrt{2}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(-\sqrt{2}\,;-1\right)\cup(1;\sqrt{2})$.

c) Với điều kiện $x>0$, đặt $t=\log x$, ta có bất phương trình

$t^2+3t-4\geq 0\Leftrightarrow t\leq -4$ hoặc $t\geq 1$ $\Leftrightarrow 0<x\leq 10^{-4}$ hoặc $x\geq 10$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(0;\dfrac{1}{10000}\right)\cup\left[10;+\infty\right)$.

d) Với điều kiện $x>0$, đặt $t=\log_2 x$, ta có bất phương trình $\dfrac{1-\frac{1}{2}t}{1+t}-\dfrac{1}{4}\leq 0$

$$\Leftrightarrow\frac{3-3t}{4(1+t)}\leq 0\Leftrightarrow t<-1 \text{ hoặc } t\geq 1$$

$$\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{2} \text{ hoặc } x\geq 2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[2\,;+\infty\right)$.

11. a) Đặt $u = \ln x$, $dv = x^{\frac{1}{2}}dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$. Do đó

$$\int_1^{e^4} \sqrt{x}\ln x dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x\Big|_1^{e^4} - \frac{4}{9}\sqrt{x^3}\Big|_1^{e^4} = \frac{4}{9}(5e^6+1).$$

b) Đặt $u = x$, $dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow du = dx, v = -\cot x$. Do đó

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\sin^2 x} = -x\cot x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \ln 2.$$

c) Đặt $u = \pi - x$, $dv = \sin x dx \Rightarrow du = -dx, v = -\cos x$. Do đó

$$\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin x dx = -(\pi - x)\cos x\Big|_0^{\pi} - \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

d) Đặt $u = 2x + 3$, $dv = e^{-x}dx \Rightarrow du = 2dx, v = -e^{-x}$. Do đó

$$\int_{-1}^{0} (2x+3)e^{-x}dx = -(2x+3)e^{-x}\Big|_{-1}^{0} - 2e^{-x}\Big|_{-1}^{0} = 3e - 5.$$

12. a) Đặt $u = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) \Rightarrow u' = 4\sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$. Khi $x = 0$ thì $u = \frac{1}{2}$.

Khi $x = \frac{\pi}{24}$ thì $u = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{24}} \tan\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)dx = \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln|u|\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{8}\ln 3.$$

b) Đặt $x = \frac{3}{5}\tan t \Rightarrow dx = \frac{3dt}{5\cos^2 t}$. Khi $x = \frac{\sqrt{3}}{5}$ thì $t = \frac{\pi}{6}$. Khi $x = \frac{3}{5}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$. Do đó

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{5}}^{\frac{3}{5}} \frac{dx}{9+25x^2} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3dt}{5\cos^2 t(9+9\tan^2 t)} = \frac{1}{15}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{1}{15}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{180}.$$

c) Đặt $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$. Khi $x = 0$ thì $u = 1$. Khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $u = 0$. Do đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x dx = \int_1^0 (u^2-1)u^4 du = \int_1^0 (u^6-u^4)du = \left(\frac{u^7}{7}-\frac{u^5}{5}\right)\Bigg|_1^0 = \frac{2}{35}.$$

d) Đặt $u = \sqrt{1+\tan x}$ hay $u^2 = 1+\tan x \Rightarrow 2udu = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Khi $x = -\frac{\pi}{4}$ thì $u = 0$. Khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $u = \sqrt{2}$. Do đó

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\sqrt{2}} 2u^2 du = \frac{2}{3}u^3\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Có thể tính tích phân bằng cách đặt $u = 1+\tan x \Rightarrow u' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Khi $x = -\frac{\pi}{4}$ thì $u = 0$. Khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $u = 2$. Do đó

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int_0^2 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

13. a) *HD* : Diện tích hình phẳng là

$$S = \int_{-1}^{2} (x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 6.$$

b) *HD* : Diện tích hình phẳng là $S = -\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x dx + \int\limits_{1}^{e} \ln x dx$.

Đặt $u = \ln x$, $dv = dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, v = x$. Ta có

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C.$$

Do đó $S = -x(\ln x - 1)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + x(\ln x - 1)\Big|_{1}^{e} = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

14. *HD* : Giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 0 \\ x = 2, y = 8. \end{array}\right.$$

Với $x \in [0; 2]$, ta có $2x^2 \geq x^3$ nên thể tích của vật thể tròn xoay là

$$V = \pi\int\limits_0^2 \left[(2x^2)^2 - (x^3)^2\right]dx = \pi\int\limits_0^2 \left(4x^4 - x^6\right)dx = \pi\left(\frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7\right)\Big|_0^2 = \frac{256\pi}{35}.$$

15. a) $(3 + 2i)z - (4 + 7i) = 2 - 5i \Leftrightarrow z = \frac{(2 - 5i) + (4 + 7i)}{3 + 2i}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{6 + 2i}{3 + 2i} \Leftrightarrow z = \frac{22}{13} - \frac{6}{13}i.$$

b) $(7 - 3i)z + (2 + 3i) = (5 - 4i)z \Leftrightarrow (5 - 4i - 7 + 3i)z = 2 + 3i$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{2 + 3i}{2 + i} \Leftrightarrow z = -\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i.$$

c) Phương trình đã cho có $\Delta' = 1 - 13 = 12i^2$ nên $z = 1 \pm 2\sqrt{3}i$.

d) Đặt $t = z^2$, ta có phương trình bậc hai $t^2 - t - 6 = 0$ với hai nghiệm là $t = -2, t = 3$. Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{3}, z_{3,4} = \pm\sqrt{2}i.$$

16. Giả sử số phức có dạng : $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$; $i^2 = -1$.

a) Ta có $|z| < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 4$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z có môđun nhỏ hơn 2 là hình tròn có tâm tại gốc toạ độ, bán kính 2 (không kể biên).

b) Ta có $z - i = x + (y - 1)i$ nên

$$|z - i| \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \le 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 \le 1.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z đã cho là hình tròn có tâm tại điểm $I(0 ; 1)$, bán kính 1.

c) Ta có $z - 1 - i = (x - 1) + (y - 1)i$ nên

$$|z - 1 - i| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z đã cho là hình tròn có tâm tại điểm $I(1 ; 1)$, bán kính 1 (không kể biên).