PHỤ LỤC

ĐỊNH LÍ CƠ BẢN CỦA ĐẠI SỐ HỌC

Định lí cơ bản của đại số học được đúc kết từ các thành tựu quan trọng của đại số thế kỉ XVIII. Việc phát hiện ra định lí này và chứng minh nó là công sức của nhiều thế hệ các nhà toán học nổi tiếng. Năm 1629, nhà toán học Pháp A.Girard đưa ra dự đoán kết quả, năm 1746 nhà toán học Pháp J.d'Alembert đã thử chứng minh định lí, nhưng chưa chặt chẽ, mãi đến năm 1799 nhà toán học Đức C.F.Gauss mới đưa ra được phép chứng minh đầu tiên. Sau đó, Gauss còn đưa ra ba phép chứng minh khác nữa.

Phép chứng minh trình bày dưới đây dựa trên các thành tựu sau đây của đại số và giải tích.

Bổ đề 1. (Định lí về trường phân rã của một đa thức).

Giả sử K là một trường, $f(x) \in K[x]$ là một đa thức bậc $n\,(n \geq 1)$. Khi đó, tồn tại một mở rộng F của trường K sao cho trên trường F, đa thức $f(x)$ có đủ n nghiệm (mỗi nghiệm được kể một số lần bằng số bội của nó).

Chú ý 1. Nếu $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F$ là các nghiệm của $f(x)$ thì trong vành đa thức $F[x]$, $f(x)$ có sự phân tích thành các nhân tử tuyến tính

$$f(x) = a_o(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)... (x - \alpha_n).$$

Vì thế, trường F nhỏ nhất có tính chất trên được gọi là trường phân rã của đa thức $f(x)$.

Bổ đề 2. (Định lí cơ bản của lí thuyết đa thức đối xứng)

Cho A là một miền nguyên vẹn. Mọi đa thức đối xứng $P(x_1, x_2, ..., x_n) \in A[x_1, x_2, ..., x_n]$ đều biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng đa thức $Q(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \in A[\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n]$, trong đó $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ là các đa thức đối xứng cơ bản của các ẩn $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

$$\sigma_2 = \sum_{i<j} x_i x_j = x_1x_2 + ... + x_1x_n + ... + x_{n-1}x_n.$$

$$...$$

$$\sigma_n = x_1x_2....x_n.$$

Chú ý 2. Cho K là một trường, $f(x) \in K[x]$ là một đa thức bậc $n \geq 1$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là các nghiệm của $f(x)$ thuộc trường phân rã F của đa thức $f(x)$. Khi đó theo định lí Vi-ét, các đa thức đối xứng cơ bản của $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là những phần tử của trường K và do đó mọi đa thức đối xứng của $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ với hệ tử thuộc K cũng là những phần tử của trường K.

Bổ đề 3. Mọi đa thức bậc lẻ với hệ số thực đều có ít nhất một nghiệm thực.

Việc chứng minh Bổ đề 3 bắt buộc phải sử dụng kiến thức của giải tích. Nếu đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc lẻ thì hàm đa thức $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị trái dấu tại hai đầu mút của một đoạn $[a; b]$ nào đó. Khi đó, $f(x)$ sẽ triệt tiêu tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$.

Bổ đề 4. Mọi phương trình bậc hai với hệ số phức đều có hai nghiệm phức.

Kết quả này được trình bày trong sách Giải tích 12 chương trình Nâng cao.

Định lí 1. Mọi đa thức bậc n $(n \geq 1)$ với hệ số thực đều có ít nhất một nghiệm phức.

Chứng minh. Giả sử đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc $n \geq 1$. Số tự nhiên n luôn có thể viết được dưới dạng $n = 2^k.n'$, trong đó $k \in \mathbb{N}$, n' là một số lẻ.

Ta chứng minh Định lí 1 quy nạp theo k.

Với $k = 0$, n là một số lẻ, Định lí 1 đúng theo Bổ đề 3.

Giả sử $k \geq 1$ và Định lí 1 đã đúng với các đa thức bậc $n = 2^{k-1}.n'$, ta chứng minh nó đúng với các đa thức bậc $n = 2^k.n'$.

Coi $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ và F là mở rộng của trường số phức $\mathbb{C}$ sao cho trên F, đa thức $f(x)$ có n nghiệm $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Ta chỉ ra có ít nhất một nghiệm $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

Giả sử c là một số thực tuỳ ý, đặt

$$\beta_{ij} = (\alpha_i + \alpha_j)c + \alpha_i\alpha_j, \ 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Xét đa thức

$$g(x) = \prod_{(i,j)} (x - \beta_{ij}) = (x - \beta_{11})(x - \beta_{12})... (x - \beta_{n-1n}).$$

Ta thấy :

• $g(x)$ có bậc là $m = \mathbb{C}_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{2^k.n'(2^k n'-1)}{2} = 2^{k-1}.m'$,

trong đó m' là một số tự nhiên lẻ.

• $g(x)$ có hệ số cao nhất bằng 1, các hệ số khác là các đa thức đối xứng cơ bản của β_{ij} và do đó là những đa thức đối xứng của $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ với hệ số thực. Từ đó, theo Chú ý 2, các hệ số của $g(x)$ là những số thực.

Theo giả thiết quy nạp, đa thức $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc $m = 2^{k-1}.m'$ với m' là một số tự nhiên lẻ sẽ có ít nhất một nghiệm phức.

Nói cách khác, tồn tại cặp chỉ số $(i, j), 1 \le i \ne j \le n$ sao cho $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$.

Cho c nhận $\mathbb{C}_n^2 + 1$ giá trị thực phân biệt, theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất một cặp chỉ số (i, j) sao cho ứng với hai giá trị thực $c_1 \ne c_2$ của c, ta đều có

$$\beta_{ij} = (\alpha_i + \alpha_j)c_1 + \alpha_i\alpha_j$$
$$\beta_{ij}' = (\alpha_i + \alpha_j)c_2 + \alpha_i\alpha_j$$

là những số phức. Nhưng từ đó ta suy ra

$$\alpha_i + \alpha_j = \frac{\beta_{ij} - \beta_{ij}'}{c_1 - c_2} \in \mathbb{C},$$
$$\alpha_i\alpha_j = \beta_{ij} - (\alpha_i + \alpha_j)c_1 \in \mathbb{C}.$$

Theo định lí Vi-ét đảo, α_i, α_j là hai nghiệm của phương trình bậc hai với hệ số phức $X^2 - (\alpha_i + \alpha_j)X + \alpha_i\alpha_j = 0$.

Từ đó, theo Bổ đề 4, $\alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{C}$, Định lí 1 được chứng minh.

Định lí 2. Mọi đa thức bậc n $(n \ge 1)$ với hệ số phức đều có ít nhất một nghiệm phức.

Chú ý. Dễ thấy rằng Định lí 2 tương đương với định lí cơ bản của đại số học

Chứng minh. Giả sử $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ là một đa thức bậc $n \ge 1$ với hệ số phức. Đặt $\overline{f}(x) = \overline{a_0}x^n + \overline{a_1}x^{n-1} + ... + \overline{a_n}$,

trong đó $\overline{a_i}$ là số phức liên hợp của $a_i, 0 \le i \le n$. Xét đa thức

$$g(x) = f(x).\overline{f}(x) = b_0x^{2n} + b_1x^{2n-1} + ... + b_{2n},$$

trong đó $b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i\overline{a_{k-i}}$, $0 \le k \le 2n$. Dễ thấy

$$\overline{b_k} = \sum_{i=0}^{k} \overline{a_i}a_{k-i} = b_k, 0 \le k \le 2n.$$

Vậy $b_k \in \mathbb{R}, 0 \le k \le 2n$ hay $g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Theo Định lí 1, $g(x)$ có ít nhất một nghiệm phức α, hay

$$g(\alpha) = f(\alpha).\overline{f}(\alpha) = 0.$$

Nếu $f(\alpha) = 0$ thì α là một nghiệm phức của đa thức $f(x)$. Nếu $\overline{f}(\alpha) = 0$, nghĩa là

$$\overline{a_0}\alpha^n + \overline{a_1}\alpha^{n-1} + ... + \overline{a_{n-1}}\alpha + \overline{a_n} = 0$$

thì bằng cách lấy liên hợp hai vế của đẳng thức trên, ta được

$$f(\overline{\alpha}) = a_0\overline{\alpha}^n + a_1\overline{\alpha}^{n-1} + ... + a_{n-1}\overline{\alpha} + a_n = 0.$$

Nói cách khác, $f(x)$ có một nghiệm phức $\overline{\alpha}$.

Vậy trong mọi trường hợp, $f(x)$ có ít nhất một nghiệm phức. Đó là điều phải chứng minh.