

§6. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

?

1 Với $a \geq 0, b \geq 0$, hãy chứng tỏ $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$.

- Đẳng thức $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ trong **?**1 cho phép ta thực hiện phép biến đổi $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ (với $a \geq 0, b \geq 0$) Phép biến đổi này được gọi là phép *đưa thừa số ra ngoài dấu căn*.
- Đôi khi, ta phải biến đổi biểu thức dưới dấu căn về dạng thích hợp rồi mới thực hiện được phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

Ví dụ 1

a) $\sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$.

- Có thể sử dụng phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn để rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai.

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức

$$3\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{5}.$$

Giải

$$\begin{aligned} 3\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{5} &= 3\sqrt{5} + \sqrt{2^2 \cdot 5} + \sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{5} \\ &= (3+2+1)\sqrt{5} \\ &= 6\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Các biểu thức $3\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ và $\sqrt{5}$ được gọi là *đồng dạng* với nhau.

?2 Rút gọn biểu thức

$$a) \sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{50}; \quad b) 4\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{45} + \sqrt{5}.$$

Một cách tổng quát :

Với hai biểu thức A, B mà $B \geq 0$, ta có $\sqrt{A^2 \cdot B} = |A| \sqrt{B}$, tức là :

$$\text{Nếu } A \geq 0 \text{ và } B \geq 0 \text{ thì } \sqrt{A^2 B} = A\sqrt{B};$$

$$\text{Nếu } A < 0 \text{ và } B \geq 0 \text{ thì } \sqrt{A^2 B} = -A\sqrt{B}.$$

Ví dụ 3. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

$$a) \sqrt{4x^2 y} \text{ với } x \geq 0, y \geq 0;$$

$$b) \sqrt{18xy^2} \text{ với } x \geq 0, y < 0.$$

Giải

$$a) \sqrt{4x^2 y} = \sqrt{(2x)^2 y} = |2x| \sqrt{y} = 2x\sqrt{y} \text{ (với } x \geq 0, y \geq 0).$$

$$b) \sqrt{18xy^2} = \sqrt{(3y)^2 2x} = |3y| \sqrt{2x} = -3y\sqrt{2x} \text{ (với } x \geq 0, y < 0).$$

?3 Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

$$a) \sqrt{28a^4 b^2} \text{ với } b \geq 0;$$

$$b) \sqrt{72a^2 b^4} \text{ với } a < 0.$$

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

- Phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn có phép biến đổi ngược với nó là phép đưa thừa số vào trong dấu căn.

Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ ta có $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$.

Với $A < 0$ và $B \geq 0$ ta có $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$.

Ví dụ 4. Đưa thừa số vào trong dấu căn

- a) $3\sqrt{7}$; b) $-2\sqrt{3}$;
c) $5a^2\sqrt{2a}$ với $a \geq 0$; d) $-3a^2\sqrt{2ab}$ với $ab \geq 0$.

Giải

$$a) 3\sqrt{7} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = \sqrt{63}.$$

$$\text{b) } -2\sqrt{3} = -\sqrt{2^2 \cdot 3} = -\sqrt{12}.$$

$$c) \quad 5a^2\sqrt{2a} = \sqrt{(5a^2)^2 \cdot 2a} = \sqrt{25a^4 \cdot 2a} = \sqrt{50a^5}.$$

$$\text{d)} -3a^2\sqrt{2ab} = -\sqrt{(3a^2)^2 \cdot 2ab} = -\sqrt{9a^4 \cdot 2ab} = -\sqrt{18a^5 b}.$$

Đưa thừa số vào trong dấu căn

- $$c) ab^4\sqrt{a} \text{ } \forall a \geq 0; \quad d) -2ab^2\sqrt{5a} \text{ } \forall a \geq 0.$$

- Có thể sử dụng phép đưa thừa số vào trong (hoặc ra ngoài) dấu căn để so sánh các căn bậc hai.

Ví dụ 5. So sánh $3\sqrt{7}$ với $\sqrt{28}$.

Giải

Cách 1. $3\sqrt{7} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = \sqrt{63}$.

Vì $\sqrt{63} > \sqrt{28}$ nên $3\sqrt{7} > \sqrt{28}$.

Cách 2. $\sqrt{28} \equiv \sqrt{2^2 \cdot 7} \equiv 2\sqrt{7}$. Vì $3\sqrt{7} > 2\sqrt{7}$ nên $3\sqrt{7} > \sqrt{28}$.

Bài tập

43. Viết các số hoặc biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{54}$; b) $\sqrt{108}$; c) $0,1\sqrt{20000}$;
d) $-0,05\sqrt{28800}$; e) $\sqrt{7 \cdot 63 \cdot a^2}$.

44. Đưa thừa số vào trong dấu căn

$$3\sqrt{5} ; -5\sqrt{2} ; -\frac{2}{3}\sqrt{xy} \text{ với } xy \geq 0 ; x\sqrt{\frac{2}{x}} \text{ với } x > 0.$$

45. So sánh

a) $3\sqrt{3}$ và $\sqrt{12}$; b) 7 và $3\sqrt{5}$;
c) $\frac{1}{3}\sqrt{51}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{150}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ và $6\sqrt{\frac{1}{2}}$.

46. Rút gọn các biểu thức sau với $x \geq 0$:

a) $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 27 - 3\sqrt{3x}$; b) $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} + 28$.

47. Rút gọn

a) $\frac{2}{x^2 - y^2} \sqrt{\frac{3(x+y)^2}{2}}$ với $x \geq 0, y \geq 0$ và $x \neq y$;
b) $\frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)}$ với $a > 0,5$.