

§4. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

Khi nào thì hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) song song với nhau ? Trùng nhau ? Cắt nhau ?

Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) có thể song song, có thể cắt nhau và cũng có thể trùng nhau.

1. Đường thẳng song song

?1 a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ :

$$y = 2x + 3 ; y = 2x - 2.$$

b) Giải thích vì sao hai đường thẳng $y = 2x + 3$ và $y = 2x - 2$ song song với nhau ? (h.9).

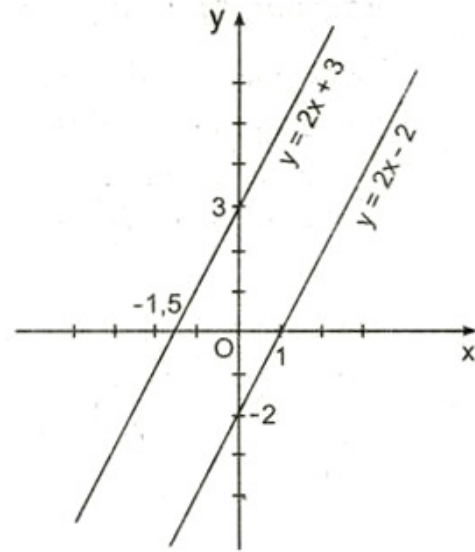
• Xét hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$).

Khi $a = a'$ và $b \neq b'$ thì hai đường thẳng đó song song với nhau, vì chúng không trùng nhau và mỗi đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng $y = ax$.

Khi $a = a'$ và $b = b'$ thì hai đường thẳng đó trùng nhau, vì thực chất chúng chỉ là một.

Vậy ta có kết luận sau :

Hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) song song với nhau khi và chỉ khi $a = a'$, $b \neq b'$ và trùng nhau khi và chỉ khi $a = a'$, $b = b'$.



Hình 9

2. Đường thẳng cắt nhau

?2 Tìm các cặp đường thẳng cắt nhau trong các đường thẳng sau :

$$y = 0,5x + 2 ; \quad y = 0,5x - 1 ; \quad y = 1,5x + 2.$$

Khi $a = a'$ thì hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) song song với nhau hoặc trùng nhau và ngược lại. Do đó, khi $a \neq a'$ thì hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ cắt nhau và ngược lại.

Vậy ta có kết luận sau :

Hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a'$.

➤ **Chú ý.** Khi $a \neq a'$ và $b = b'$ thì hai đường thẳng có cùng tung độ góc, do đó chúng cắt nhau tại một điểm trên trục tung có tung độ là b .

3. Bài toán áp dụng

Cho hai hàm số bậc nhất $y = 2mx + 3$ và $y = (m + 1)x + 2$.

Tìm giá trị của m để đồ thị của hai hàm số đã cho là :

- Hai đường thẳng cắt nhau ;
- Hai đường thẳng song song với nhau.

Giải

Hàm số $y = 2mx + 3$ có các hệ số $a = 2m$ và $b = 3$.

Hàm số $y = (m + 1)x + 2$ có các hệ số $a' = m + 1$ và $b' = 2$.

Các hàm số đã cho là hàm số bậc nhất, do đó các hệ số a và a' phải khác 0, tức là

$$2m \neq 0 \text{ và } m + 1 \neq 0 \text{ hay } m \neq 0 \text{ và } m \neq -1.$$

- Đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a'$, tức là

$$2m \neq m + 1 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Kết hợp với điều kiện trên, ta có $m \neq 0$, $m \neq -1$ và $m \neq 1$.

- Đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi $a = a'$ và $b \neq b'$.

Theo đề bài, ta có $b \neq b'$ (vì $3 \neq 2$).

Vậy đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi $a = a'$, tức là

$$2m = m + 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

Kết hợp với điều kiện trên, ta thấy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Ghi chú. Khi trình bày lời giải, để cho ngắn gọn, có thể không ghi phần nhận xét các hệ số.

Bài tập

- Hãy chỉ ra ba cặp đường thẳng cắt nhau và các cặp đường thẳng song song với nhau trong số các đường thẳng sau :
 - $y = 1,5x + 2$;
 - $y = x + 2$;
 - $y = 0,5x - 3$;
 - $y = x - 3$;
 - $y = 1,5x - 1$;
 - $y = 0,5x + 3$.
- Cho hai hàm số bậc nhất $y = mx + 3$ và $y = (2m + 1)x - 5$.

Tìm giá trị của m để đồ thị của hai hàm số đã cho là :

 - Hai đường thẳng song song với nhau ;
 - Hai đường thẳng cắt nhau.

22. Cho hàm số $y = ax + 3$. Hãy xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau :
- Đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $y = -2x$.
 - Khi $x = 2$ thì hàm số có giá trị $y = 7$.

Luyện tập

23. Cho hàm số $y = 2x + b$. Hãy xác định hệ số b trong mỗi trường hợp sau :
- Đồ thị của hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 ;
 - Đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $A(1 ; 5)$.

24. Cho hai hàm số bậc nhất $y = 2x + 3k$ và $y = (2m + 1)x + 2k - 3$.
Tìm điều kiện đối với m và k để đồ thị của hai hàm số là :
- Hai đường thẳng cắt nhau ;
 - Hai đường thẳng song song với nhau ;
 - Hai đường thẳng trùng nhau.

25. a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ :

$$y = \frac{2}{3}x + 2 ; \quad y = -\frac{3}{2}x + 2 .$$

- b) Một đường thẳng song song với trục hoành Ox , cắt trục tung Oy tại điểm có tung độ bằng 1 , cắt các đường thẳng $y = \frac{2}{3}x + 2$ và $y = -\frac{3}{2}x + 2$ theo thứ tự tại hai điểm M và N . Tìm tọa độ của hai điểm M và N .
26. Cho hàm số bậc nhất $y = ax - 4$ (1). Hãy xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau :
- Đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng $y = 2x - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 2 .
 - Đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng $y = -3x + 2$ tại điểm có tung độ bằng 5 .