§4. Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương

1. Định lí

?1 *Tính và so sánh* $\sqrt{\frac{16}{25}}$ *và* $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$.

ĐỊNH LÍ

> *Với số* a *không âm và số* b *dương, ta có*
>
> $$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Chứng minh. Vì $a \geq 0$ và $b > 0$ nên $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ xác định và không âm.

Ta có $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$.

Vậy $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ là căn bậc hai số học của $\frac{a}{b}$, tức là $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

2. Áp dụng

a) Quy tắc khai phương một thương

Muốn khai phương một thương $\frac{a}{b}$, *trong đó số* a *không âm và số* b *dương, ta có thể lần lượt khai phương số* a *và số* b, *rồi lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.*

Ví dụ 1. Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính

a) $\sqrt{\frac{25}{121}}$; b) $\sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}}$.

Giải

a) $\sqrt{\frac{25}{121}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{121}} = \frac{5}{11}$.

b) $\sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{9}{16}} : \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{9}{10}$.

?2 *Tính*

a) $\sqrt{\frac{225}{256}}$; *b)* $\sqrt{0,0196}$.

b) Quy tắc chia hai căn bậc hai

Muốn chia căn bậc hai của số a *không âm cho căn bậc hai của số* b *dương, ta có thể chia số* a *cho số* b *rồi khai phương kết quả đó.*

Ví dụ 2. Tính

a) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$; b) $\sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}}$.

Giải

a) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$.

b) $\sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{49}{8} : \frac{25}{8}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$.

?3 *Tính*

a) $\dfrac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$.

➢ ***Chú ý.*** *Một cách tổng quát, với biểu thức* A *không âm và biểu thức* B *dương, ta có*

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{\dfrac{4a^2}{25}}$; b) $\dfrac{\sqrt{27a}}{\sqrt{3a}}$ với $a > 0$.

Giải

a) $\sqrt{\dfrac{4a^2}{25}} = \dfrac{\sqrt{4a^2}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{4}.\sqrt{a^2}}{5} = \dfrac{2}{5}|a|$.

b) $\dfrac{\sqrt{27a}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\dfrac{27a}{3a}} = \sqrt{9} = 3$ (với $a > 0$).

?4 *Rút gọn*

a) $\sqrt{\dfrac{2a^2b^4}{50}}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{2ab^2}}{\sqrt{162}}$ *với* $a \geq 0$.

Bài tập

28. Tính

a) $\sqrt{\dfrac{289}{225}}$; b) $\sqrt{2\dfrac{14}{25}}$;

c) $\sqrt{\dfrac{0,25}{9}}$; d) $\sqrt{\dfrac{8,1}{1,6}}$.

29. Tính

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$;

b) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$;

d) $\dfrac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3.3^5}}$.

30. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\dfrac{y}{x}.\sqrt{\dfrac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0, y \neq 0$; .

b) $2y^2.\sqrt{\dfrac{x^4}{4y^2}}$ với $y < 0$;

c) $5xy.\sqrt{\dfrac{25x^2}{y^6}}$ với $x < 0, y > 0$;

d) $0{,}2x^3y^3.\sqrt{\dfrac{16}{x^4y^8}}$ với $x \neq 0, y \neq 0$.

31. a) So sánh $\sqrt{25-16}$ và $\sqrt{25}-\sqrt{16}$;

b) Chứng minh rằng, với $a > b > 0$ thì $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b}$.

Luyện tập

32. Tính

a) $\sqrt{1\dfrac{9}{16}.5\dfrac{4}{9}.0{,}01}$;

b) $\sqrt{1{,}44.1{,}21-1{,}44.0{,}4}$;

c) $\sqrt{\dfrac{165^2-124^2}{164}}$;

d) $\sqrt{\dfrac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$.

33. Giải phương trình

a) $\sqrt{2}.x-\sqrt{50}=0$;

b) $\sqrt{3}.x+\sqrt{3}=\sqrt{12}+\sqrt{27}$;

c) $\sqrt{3}.x^2-\sqrt{12}=0$;

d) $\dfrac{x^2}{\sqrt{5}}-\sqrt{20}=0$.

34. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $ab^2.\sqrt{\dfrac{3}{a^2b^4}}$ với $a < 0, b \neq 0$;

b) $\sqrt{\dfrac{27(a-3)^2}{48}}$ với $a > 3$;

c) $\sqrt{\dfrac{9+12a+4a^2}{b^2}}$ với $a \geq -1,5$ và $b < 0$; d) $(a-b).\sqrt{\dfrac{ab}{(a-b)^2}}$ với $a < b < 0$.

35. Tìm x, biết :

a) $\sqrt{(x-3)^2} = 9$;

b) $\sqrt{4x^2+4x+1} = 6$.

36. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ? Vì sao ?

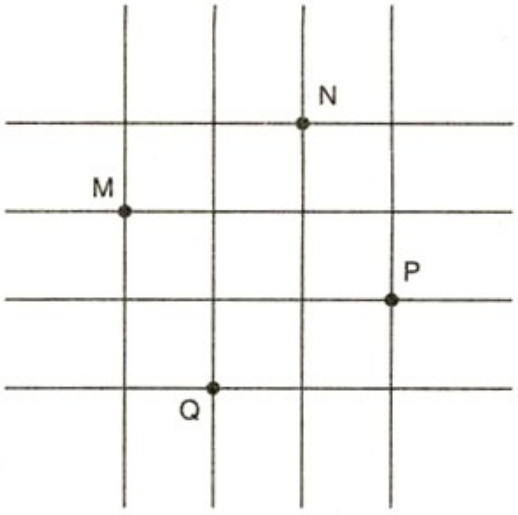
a) $0,01 = \sqrt{0,0001}$;

b) $-0,5 = \sqrt{-0,25}$;

c) $\sqrt{39} < 7$ và $\sqrt{39} > 6$;

d) $(4-\sqrt{13}).2x < \sqrt{3}(4-\sqrt{13})$

$\Leftrightarrow 2x < \sqrt{3}$.



Hình 3

37. ***Đố.*** Trên lưới ô vuông, mỗi ô vuông cạnh 1cm, cho bốn điểm M, N, P, Q (h.3).

Hãy xác định số đo cạnh, đường chéo và diện tích của tứ giác MNPQ.