

§3. Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương

1. Định lí

? Tính và so sánh : $\sqrt{16 \cdot 25}$ và $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25}$.

ĐỊNH LÍ

Với hai số a và b không âm, ta có

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Chứng minh. Vì $a \geq 0$ và $b \geq 0$ nên $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ xác định và không âm.

Ta có $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b$.

Vậy $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ là căn bậc hai số học của $a \cdot b$, tức là $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

➤ **Chú ý.** Định lí trên có thể mở rộng cho tích của nhiều số không âm.

2. Áp dụng

a) Quy tắc khai phương một tích

Muốn khai phương một tích của các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau.

Ví dụ 1. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính :

a) $\sqrt{49 \cdot 1,44 \cdot 25}$;

b) $\sqrt{810 \cdot 40}$.

Giải

a) $\sqrt{49 \cdot 1,44 \cdot 25} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{1,44} \cdot \sqrt{25} = 7 \cdot 1,2 \cdot 5 = 42$.

b) $\sqrt{810 \cdot 40} = \sqrt{81 \cdot 4 \cdot 100} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{100} = 9 \cdot 2 \cdot 10 = 180$.

? *Tính*

a) $\sqrt{0,16 \cdot 0,64 \cdot 225}$;

b) $\sqrt{250 \cdot 360}$.

b) Quy tắc nhân các căn bậc hai

Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

Ví dụ 2. Tính

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$;

b) $\sqrt{1,3} \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{10}$.

Giải

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$.

b) $\sqrt{1,3} \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{1,3 \cdot 52 \cdot 10} = \sqrt{13 \cdot 52} = \sqrt{13 \cdot 13 \cdot 4} = \sqrt{(13 \cdot 2)^2} = 26$.

23 Tính

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$;

b) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{4,9}$.

➤ **Chú ý.** Một cách tổng quát, với hai biểu thức A và B không âm ta có

$$\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}.$$

Đặc biệt, với biểu thức A không âm ta có

$$(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A.$$

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{27a}$ với $a \geq 0$;

b) $\sqrt{9a^2b^4}$.

Giải

a) $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{27a} = \sqrt{3a \cdot 27a} = \sqrt{81a^2} = \sqrt{(9a)^2} = |9a| = 9a$ (vì $a \geq 0$).

b) $\sqrt{9a^2b^4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^4} = 3 \cdot |a| \cdot \sqrt{(b^2)^2} = 3|a|b^2$.

Ta còn có thể rút gọn như sau : $\sqrt{9a^2b^4} = \sqrt{(3ab^2)^2} = |3ab^2| = 3|a|b^2$.

24 Rút gọn các biểu thức sau (với a và b không âm) :

a) $\sqrt{3a^3} \cdot \sqrt{12a}$;

b) $\sqrt{2a \cdot 32ab^2}$.

Bài tập

17. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính

a) $\sqrt{0,09 \cdot 64}$;

b) $\sqrt{2^4 \cdot (-7)^2}$;

c) $\sqrt{12,1 \cdot 360}$;

d) $\sqrt{2^2 \cdot 3^4}$.

18. Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai, hãy tính

a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{63}$;

b) $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{48}$;

c) $\sqrt{0,4} \cdot \sqrt{6,4}$;

d) $\sqrt{2,7} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{1,5}$.

19. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{0,36a^2}$ với $a < 0$;

b) $\sqrt{a^4(3-a)^2}$ với $a \geq 3$;

c) $\sqrt{27.48(1-a)^2}$ với $a > 1$;

d) $\frac{1}{a-b} \cdot \sqrt{a^4(a-b)^2}$ với $a > b$.

20. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{\frac{2a}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3a}{8}}$ với $a \geq 0$;

b) $\sqrt{13a} \cdot \sqrt{\frac{52}{a}}$ với $a > 0$;

c) $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{45a} - 3a$ với $a \geq 0$;

d) $(3-a)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180a^2}$.

21. Khai phương tích $12 \cdot 30 \cdot 40$ được :

(A) 1200 ;

(B) 120 ;

(C) 12 ;

(D) 240.

Hãy chọn kết quả đúng.

Luyện tập

22. Biến đổi các biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi tính

a) $\sqrt{13^2 - 12^2}$;

b) $\sqrt{17^2 - 8^2}$;

c) $\sqrt{117^2 - 108^2}$;

d) $\sqrt{313^2 - 312^2}$.

23. Chứng minh

a) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$;

b) $(\sqrt{2006} - \sqrt{2005})$ và $(\sqrt{2006} + \sqrt{2005})$ là hai số nghịch đảo của nhau.

24. Rút gọn và tìm giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) của các căn thức sau :

a) $\sqrt{4(1 + 6x + 9x^2)^2}$ tại $x = -\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{9a^2(b^2 + 4 - 4b)}$ tại $a = -2, b = -\sqrt{3}$.

25. Tìm x, biết :

a) $\sqrt{16x} = 8$;

b) $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$;

c) $\sqrt{9(x-1)} = 21$;

d) $\sqrt{4(1-x)^2} - 6 = 0$.

26. a) So sánh $\sqrt{25+9}$ và $\sqrt{25} + \sqrt{9}$;

b) Với $a > 0$ và $b > 0$, chứng minh $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

27. So sánh

a) 4 và $2\sqrt{3}$;

b) $-\sqrt{5}$ và -2 .