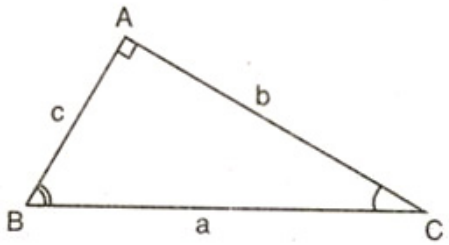
§4. Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

Một chiếc thang dài 3m. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng bằng bao nhiêu để nó tạo được với mặt đất một góc "an toàn" 65° (tức là đảm bảo thang không bị đổ khi sử dụng) ?

1. Các hệ thức

Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền a và các cạnh góc vuông b, c (h.25).



Hình 25

?1 *Viết các tỉ số lượng giác của góc* B *và góc* C. *Từ đó hãy tính mỗi cạnh góc vuông theo :*

a) Cạnh huyền và các tỉ số lượng giác của góc B *và góc* C ;

b) Cạnh góc vuông còn lại và các tỉ số lượng giác của góc B *và góc* C.

Từ các kết quả trên, ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng :

a) Cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với côsin góc kề ;

b) Cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với côtang góc kề.

Như vậy, trong tam giác ABC vuông tại A (h.25), ta có các hệ thức

$b = a.\sin B = a.\cos C$; $b = c.tgB = c.\cotg C$;

$c = a.\sin C = a.\cos B$; $c = b.tgC = b.\cotg B$.

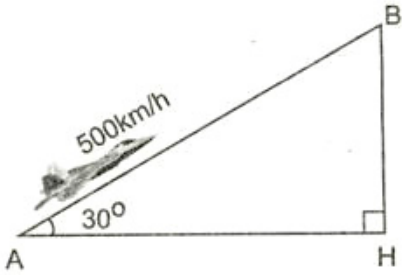
Ví dụ 1. Một chiếc máy bay bay lên với vận tốc 500 km/h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 30^o (h. 26). Hỏi sau 1,2 phút máy bay lên cao được bao nhiêu kilômét theo phương thẳng đứng ?

Giải. Giả sử trong hình 26, AB là đoạn đường máy bay bay lên trong 1,2 phút thì BH chính là độ cao máy bay đạt được sau 1,2 phút đó.

Vì 1,2 phút = $\frac{1}{50}$ giờ nên AB = $\frac{500}{50}$ = 10 (km).

Do đó

$$BH = AB.\sin A$$
$$= 10.\sin 30^o$$
$$= 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ (km)}.$$



Hình 26

Vậy sau 1,2 phút máy bay lên cao được 5km.

Ví dụ 2. Với bài toán đặt ra trong khung ở đầu §4, chân chiếc thang cần phải đặt cách chân tường một khoảng là

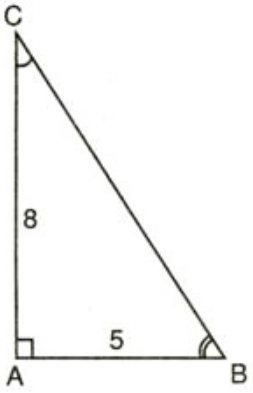
$$3.\cos 65^o \approx 1{,}27 \text{ (m)}.$$

2. Áp dụng giải tam giác vuông

Trong một tam giác vuông, nếu cho biết trước hai cạnh hoặc một cạnh và một góc nhọn thì ta sẽ tìm được tất cả các cạnh và góc còn lại của nó. Bài toán đặt ra như thế gọi là bài toán "Giải tam giác vuông".

Lưu ý rằng, trong kết quả của các ví dụ và các bài tập dưới đây, nếu không nói gì thêm thì ta làm tròn đến độ (với số đo góc) và đến chữ số thập phân thứ ba (với số đo độ dài).

Ví dụ 3. Cho tam giác vuông ABC với các cạnh góc vuông AB = 5, AC = 8 (h.27). Hãy giải tam giác vuông ABC.



Hình 27

Giải. Theo định lí Py-ta-go, ta có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 8^2} \approx 9{,}434.$$

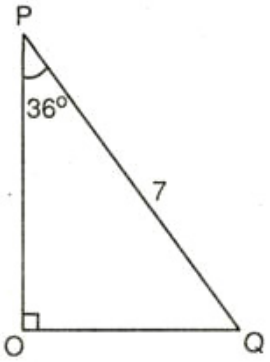
Mặt khác

$$\text{tg}\, C = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

Tra bảng hay dùng máy tính bỏ túi, ta tìm được $\widehat{C} \approx 32^o$, do đó $\widehat{B} \approx 90^o - 32^o = 58^o$.

?2 *Trong ví dụ 3, hãy tính cạnh* BC *mà không áp dụng định lí Py-ta-go.*

Ví dụ 4. Cho tam giác OPQ vuông tại O có $\widehat{P} = 36^o$, PQ = 7 (h.28). Hãy giải tam giác vuông OPQ.



Hình 28

Giải. Ta có $\widehat{Q} = 90^o - \widehat{P} = 90^o - 36^o = 54^o$.

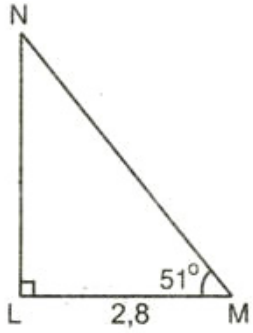
Theo các hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có

$OP = PQ.\sin Q = 7.\sin 54^o \approx 5{,}663$;

$OQ = PQ.\sin P = 7.\sin 36^o \approx 4{,}114$.

?3 *Trong ví dụ 4, hãy tính các cạnh* OP, OQ *qua côsin của các góc* P *và* Q.

Ví dụ 5. Cho tam giác LMN vuông tại L có $\widehat{M} = 51^o$, LM = 2,8 (h.29). Hãy giải tam giác vuông LNM.



Hình 29

Giải. Ta có

$$\widehat{N} = 90^o - \widehat{M} = 90^o - 51^o = 39^o.$$

Theo các hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có

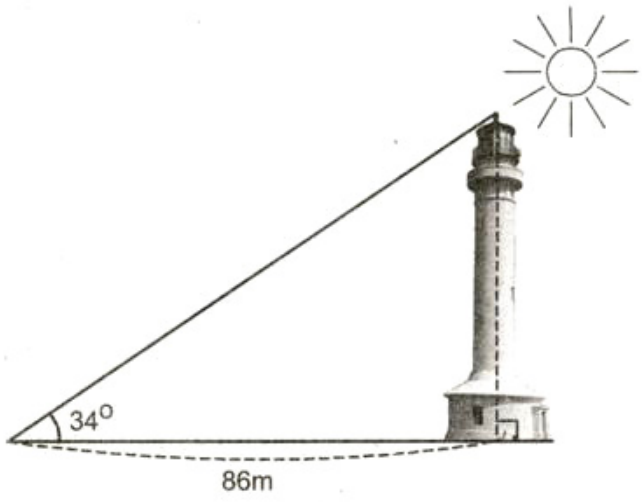
$$LN = LM.\,tg\,M = 2{,}8.tg\,51^o \approx 3{,}458\ ;$$

$$MN = \frac{LM}{\cos 51^o} \approx \frac{2{,}8}{0{,}6293} \approx 4{,}449.$$

Nhận xét. Cũng như trong ví dụ 3, ở đây ta có thể tính MN bằng cách áp dụng định lí Py-ta-go. Tuy nhiên khi đó, trong việc sử dụng bảng số và máy tính, ta sẽ gặp các thao tác phức tạp hơn. Do đó, khi giải tam giác vuông, trong nhiều trường hợp, nếu đã biết hai cạnh ta nên tìm một góc nhọn trước ; sau đó dùng các hệ thức giữa cạnh và góc để tính cạnh thứ ba. Cách này có thể giúp cho việc thực hiện các phép toán bằng bảng số và máy tính đơn giản hơn.

Bài tập

26. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 34^o và bóng của một tháp trên mặt đất dài 86m (h.30). Tính chiều cao của tháp (làm tròn đến mét).



Hình 30

27. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết rằng

a) b = 10cm, $\widehat{C} = 30^o$;

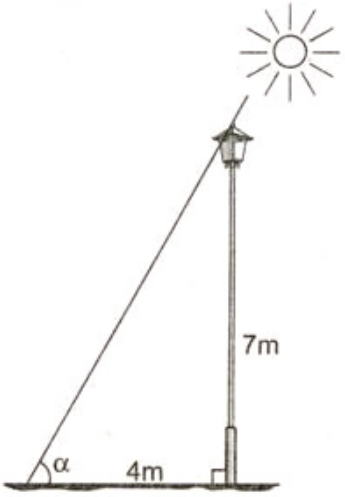
b) c = 10cm, $\widehat{C} = 45^o$;

c) a = 20cm, $\widehat{B} = 35^o$;

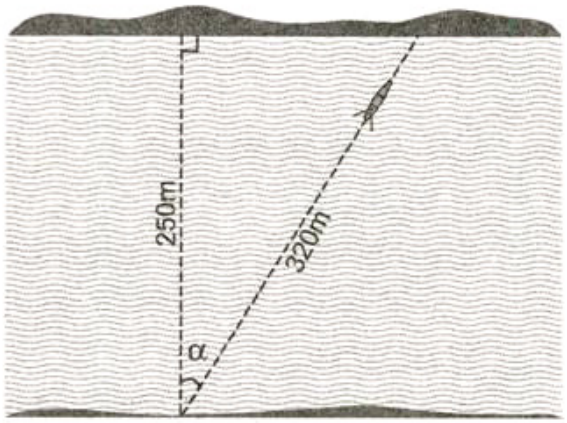
d) c = 21cm, b = 18cm.

Luyện tập

28. Một cột đèn cao 7m có bóng trên mặt đất dài 4m. Hãy tính góc (làm tròn đến phút) mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất (góc α trong hình 31).



Hình 31



Hình 32

29. Một khúc sông rộng khoảng 250m. Một chiếc đò chèo qua sông bị dòng nước đẩy xiên nên phải chèo khoảng 320m mới sang được bờ bên kia. Hỏi dòng nước đã đẩy chiếc đò lệch đi một góc bằng bao nhiêu độ ? (góc α trong hình 32).

30. Cho tam giác ABC, trong đó BC = 11cm, $\widehat{ABC} = 38^o$, $\widehat{ACB} = 30^o$. Gọi điểm N là chân của đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC. Hãy tính :

a) Đoạn thẳng AN ;

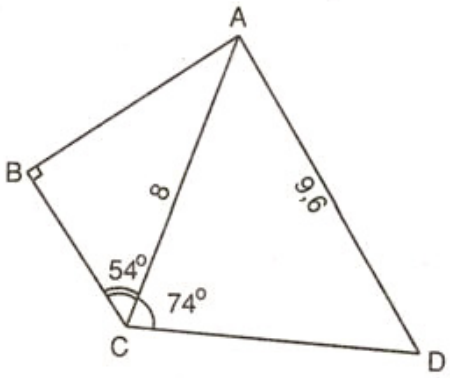
b) Cạnh AC.

Gợi ý. Kẻ BK vuông góc với AC.

31. Trong hình 33, AC = 8cm, AD = 9,6cm, $\widehat{ABC} = 90^o$, $\widehat{ACB} = 54^o$ và $\widehat{ACD} = 74^o$. Hãy tính :

a) AB ;

b) $\widehat{ADC}$.



Hình 33

32. Một con thuyền với vận tốc 2km/h vượt qua một khúc sông nước chảy mạnh mất 5 phút. Biết rằng đường đi của con thuyền tạo với bờ một góc 70^o. Từ đó đã có thể tính được chiều rộng của khúc sông chưa ? Nếu có thể hãy tính kết quả (làm tròn đến mét).