

§8. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần biết vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết.

Ví dụ 1. Rút gọn $5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5}$ với $a > 0$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5} &= 5\sqrt{a} + \frac{6}{2}\sqrt{a} - a\sqrt{\frac{4a}{a^2}} + \sqrt{5} \\ &= 5\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + \sqrt{5} = 6\sqrt{a} + \sqrt{5}.\end{aligned}$$

?1 Rút gọn $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a} + \sqrt{a}$ với $a \geq 0$.

Rút gọn biểu thức được áp dụng trong nhiều bài toán về biểu thức có chứa căn thức bậc hai.

Ví dụ 2. Chứng minh đẳng thức

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}.$$

Giải. Biến đổi vế trái, ta có

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) &= (1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 = 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Sau khi biến đổi, ta thấy vế trái bằng vế phải. Vậy đẳng thức được chứng minh.

?2 Chứng minh đẳng thức

$$\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \text{ với } a > 0, b > 0.$$

Ví dụ 3. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right) \text{ với } a > 0 \text{ và } a \neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức P ;

b) Tìm giá trị của a để $P < 0$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \left(\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} - 1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \cdot \frac{(\sqrt{a} - 1)^2 - (\sqrt{a} + 1)^2}{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1)} \\ &= \left(\frac{a - 1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \cdot \frac{a - 2\sqrt{a} + 1 - a - 2\sqrt{a} - 1}{a - 1} = \frac{(a - 1)(-4\sqrt{a})}{(2\sqrt{a})^2} \\ &= \frac{(1 - a) \cdot 4\sqrt{a}}{4a} = \frac{1 - a}{\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{1 - a}{\sqrt{a}}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

b) Do $a > 0$ và $a \neq 1$ nên $P < 0$ khi và chỉ khi

$$\frac{1 - a}{\sqrt{a}} < 0 \Leftrightarrow 1 - a < 0 \Leftrightarrow a > 1.$$

? 3 Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\frac{x^2 - 3}{x + \sqrt{3}}$;

b) $\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$.

Bài tập

58. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5}$;

b) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5}$;

c) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$;

d) $0,1 \cdot \sqrt{200} + 2 \cdot \sqrt{0,08} + 0,4 \cdot \sqrt{50}$.

59. Rút gọn các biểu thức sau (với $a > 0$, $b > 0$) :

a) $5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5a\sqrt{16ab^2} - 2\sqrt{9a}$;

b) $5a\sqrt{64ab^3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{12a^3b^3} + 2ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b}$.

60. Cho biểu thức $B = \sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1}$ với $x \geq -1$.

a) Rút gọn biểu thức B ;

b) Tìm x sao cho B có giá trị là 16.

61. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$;

b) $\left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3}$ với $x > 0$.

Luyện tập

Rút gọn các biểu thức sau (các bài 62 và 63) :

62. a) $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$; b) $\sqrt{150} + \sqrt{1,6} \cdot \sqrt{60} + 4,5 \cdot \sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{6}$;

c) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$; d) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$.

63. a) $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$ với $a > 0$ và $b > 0$;

b) $\sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}} \cdot \sqrt{\frac{4m-8mx+4mx^2}{81}}$ với $m > 0$ và $x \neq 1$.

64. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$;

b) $\frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|$ với $a+b > 0$ và $b \neq 0$.

65. Rút gọn rồi so sánh giá trị của M với 1, biết

$$M = \left(\frac{1}{a - \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} \right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 2\sqrt{a} + 1} \quad \text{với } a > 0 \text{ và } a \neq 1.$$

66. Giá trị của biểu thức $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ bằng

- (A) $\frac{1}{2}$; (B) 1; (C) -4; (D) 4.

Hãy chọn câu trả lời đúng.