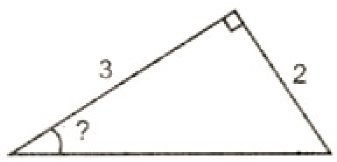
§2. Tỉ số lượng giác của góc nhọn



Trong một tam giác vuông, nếu biết tỉ số độ dài của hai cạnh thì có biết được độ lớn của các góc nhọn hay không ?

1. Khái niệm tỉ số lượng giác của một góc nhọn

a) Mở đầu

Cho tam giác ABC vuông tại A. Xét góc nhọn B của nó. Nhắc lại rằng : Cạnh AB được gọi là *cạnh kề* của góc B, cạnh AC được gọi là *cạnh đối* của góc B.

Ta cũng đã biết : Hai tam giác vuông đồng dạng với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng số đo của một góc nhọn, hoặc các tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề của một góc nhọn trong mỗi tam giác đó là như nhau (h.13). Như vậy, tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề của một góc nhọn trong tam giác vuông đặc trưng cho độ lớn của góc nhọn đó.

Hình 13

?1 *Xét tam giác* ABC *vuông tại* A *có* $\widehat{B} = \alpha$. *Chứng minh rằng*

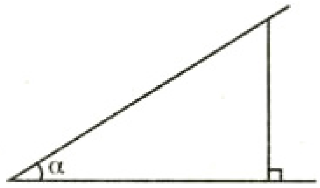
a) $\alpha = 45^{o} \Leftrightarrow \dfrac{AC}{AB} = 1$;

b) $\alpha = 60^{o} \Leftrightarrow \dfrac{AC}{AB} = \sqrt{3}$.

Ngoài tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề, ta còn xét các tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối, cạnh đối và cạnh huyền, cạnh kề và cạnh huyền của một góc nhọn trong tam giác vuông. Các tỉ số này chỉ thay đổi khi độ lớn của góc nhọn đang xét thay đổi và ta gọi chúng là các *tỉ số lượng giác* của góc nhọn đó.

b) Định nghĩa

Cho góc nhọn α. Vẽ một tam giác vuông có một góc nhọn α (ta có thể vẽ như sau : Vẽ góc α, từ một điểm bất kì trên một cạnh của góc α kẻ đường vuông góc với cạnh kia (h.14)), xác định cạnh đối và cạnh kề của góc α. Khi đó :



Hình 14

> *Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là* **sin** *của góc α, kí hiệu* $\sin\alpha$.
>
> *Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là* **côsin** *của góc α, kí hiệu* $\cos\alpha$.
>
> *Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là* **tang** *của góc α, kí hiệu* $\mathrm{tg}\,\alpha$ *(hay* $\tan\alpha$*)*.
>
> *Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là* **côtang** *của góc α, kí hiệu* $\mathrm{cotg}\,\alpha$ *(hay* $\cot\alpha$ *)*.

Như vậy

$$\sin\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}; \qquad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}.$$

Nhận xét. Từ định nghĩa trên, dễ thấy các tỉ số lượng giác của một góc nhọn luôn luôn dương. Hơn nữa, ta có

$$\sin\alpha < 1, \cos\alpha < 1.$$

?2 *Cho tam giác ABC vuông tại A có* $\widehat{C} = \beta$. *Hãy viết các tỉ số lượng giác của góc* β.

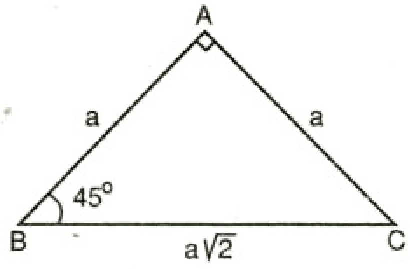
Ví dụ 1. (h.15). Ta có

$$\sin 45^{\circ} = \sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;$$

$$\cos 45^{\circ} = \cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;$$

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = \operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{AC}{AB} = 1\ ;$$

$$\operatorname{cotg} 45^{\circ} = \operatorname{cotg} \widehat{B} = \frac{AB}{AC} = 1.$$



Hình 15

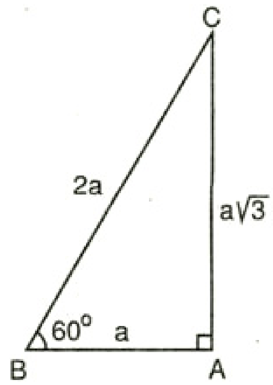
Ví dụ 2. (h.16). Ta có

$$\sin 60^{\circ} = \sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

$$\cos 60^{\circ} = \cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}\ ;$$

$$\operatorname{tg} 60^{\circ} = \operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \sqrt{3}\ ;$$

$$\operatorname{cotg} 60^{\circ} = \operatorname{cotg} \widehat{B} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

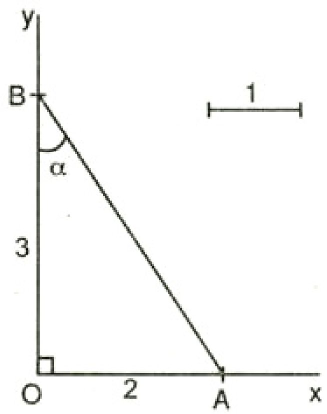


Hình 16

• Như vậy, cho góc nhọn α, ta tính được các tỉ số lượng giác của nó. Ngược lại, cho một trong các tỉ số lượng giác của góc nhọn α, ta có thể dựng được góc đó.

Ví dụ 3. Dựng góc nhọn α, biết $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$.

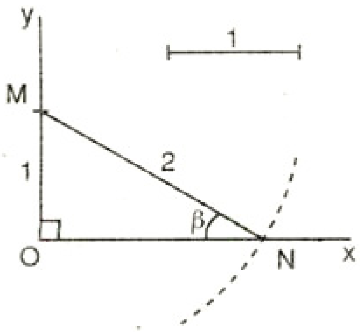
Giải. (h.17) Dựng góc vuông xOy. Lấy một đoạn thẳng làm đơn vị. Trên tia Ox, lấy điểm A sao cho OA = 2 ; trên tia Oy, lấy điểm B sao cho OB = 3. Góc OBA bằng góc α cần dựng. Thật vậy, ta có $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \widehat{OBA} = \frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$.



Hình 17

Ví dụ 4. Hình 18 minh hoạ cách dựng góc nhọn β, khi biết $\sin\beta = 0{,}5$.

?3 *Hãy nêu cách dựng góc nhọn β theo hình 18 và chứng minh cách dựng đó là đúng.*

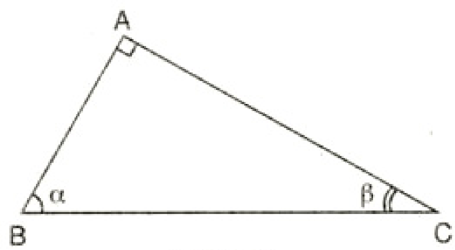


Hình 18

➢ **Chú ý.** *Nếu hai góc nhọn α và β có $\sin\alpha = \sin\beta$ (hoặc $\cos\alpha = \cos\beta$, hoặc $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta$, hoặc $\mathrm{cotg}\,\alpha = \mathrm{cotg}\,\beta$) thì $\alpha = \beta$ vì chúng là hai góc tương ứng của hai tam giác vuông đồng dạng.*

2. Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

?4 *Cho hình 19. Hãy cho biết tổng số đo của góc α và góc β. Lập các tỉ số lượng giác của góc α và góc β. Trong các tỉ số này, hãy cho biết các cặp tỉ số bằng nhau.*



Hình 19

Từ các cặp tỉ số bằng nhau đó, ta rút ra

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{cotg}\,\beta,\ \mathrm{cotg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta.$$

Vì hai góc phụ nhau bao giờ cũng bằng hai góc nhọn của một tam giác vuông nào đó, nên ta có định lí sau đây về quan hệ giữa các tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

ĐỊNH LÍ

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.

Ví dụ 5. Theo ví dụ 1, ta có

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \mathrm{tg}\,45^\circ = \mathrm{cotg}\,45^\circ = 1.$$

Ví dụ 6. Ta có các góc 30^o và 60^o là hai góc phụ nhau. Do đó, theo ví dụ 2 và theo quan hệ giữa các tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, ta có

$\sin 30^o = \cos 60^o = \dfrac{1}{2}$; $\qquad \cos 30^o = \sin 60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\operatorname{tg} 30^o = \operatorname{cotg} 60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\qquad \operatorname{cotg} 30^o = \operatorname{tg} 60^o = \sqrt{3}$.

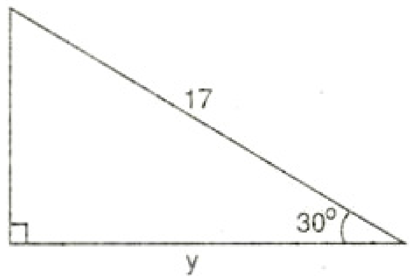
Qua ví dụ 5 và ví dụ 6, ta rút ra bảng tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt như sau :

Tỉ số lượng giác \ α	30^o	45^o	60^o
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{cotg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 7. Trong hình 20, cạnh y được tính như sau :

Ta có $\cos 30^o = \dfrac{y}{17}$,

do đó $y = 17\cos 30^o = \dfrac{17\sqrt{3}}{2} \approx 14{,}7$.



Hình 20

➢ ***Chú ý.*** *Từ nay khi viết các tỉ số lượng giác của một góc nhọn trong tam giác, ta bỏ kí hiệu " ∧ " đi. Chẳng hạn, viết* sin A *thay cho* $\sin \widehat{A}$,...

Có thể em chưa biết

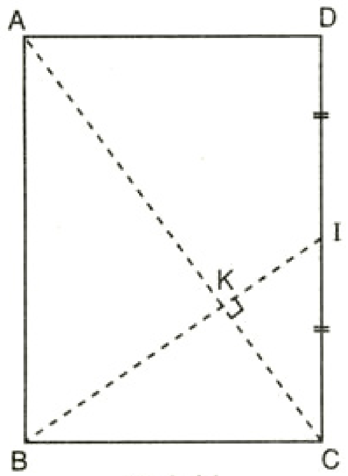
Bất ngờ về cỡ giấy A4
(21cm × 29,7cm)

- Tỉ số giữa chiều dài và chiều rộng của tờ giấy A4 xấp xỉ bằng $\sqrt{2}$.

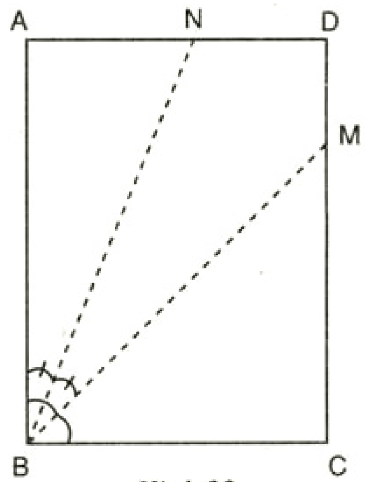
- Giả sử tờ giấy A4 được minh hoạ trên các hình 21 và 22.

Nếu gấp tờ giấy theo các đường thẳng AC và BI (I là trung điểm của CD) thì ta sẽ có một góc hầu như vuông ! (h.21).

Nếu gấp tờ giấy theo đường phân giác BM của góc ABC, sau đó gấp tiếp theo đường phân giác BN của góc ABM thì điểm M sẽ trùng với điểm A ! (h.22)



Hình 21



Hình 22

Bằng hiểu biết của mình, em có thể giải thích được các điều lí thú này đấy.

Bài tập

10. Vẽ một tam giác vuông có một góc nhọn 34^o rồi viết các tỉ số lượng giác của góc 34^o.

11. Cho tam giác ABC vuông tại C, trong đó AC = 0,9m, BC = 1,2m. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A.

12. Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45^o :

$$\sin 60^o, \cos 75^o, \sin 52^o30', \operatorname{cotg} 82^o, \operatorname{tg} 80^o.$$

Luyện tập

13. Dựng góc nhọn α, biết :

a) $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$; b) $\cos\alpha = 0{,}6$; c) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$; d) $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{3}{2}$.

14. Sử dụng định nghĩa các tỉ số lượng giác của một góc nhọn để chứng minh rằng : Với góc nhọn α tuỳ ý, ta có

a) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{cotg}\alpha = 1$;

b) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

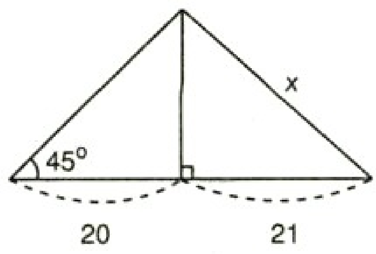
Gợi ý. Sử dụng định lí Py-ta-go.

15. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $\cos B = 0{,}8$, hãy tính các tỉ số lượng giác của góc C.

Gợi ý. Sử dụng bài tập 14.

16. Cho tam giác vuông có một góc 60° và cạnh huyền có độ dài là 8. Hãy tìm độ dài của cạnh đối diện với góc 60°.

17. Tìm x trong hình 23.



Hình 23