§6 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

I - BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Bất phương trình mũ cơ bản

> Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.

Ta xét bất phương trình dạng $a^x > b$.

- Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$ vì $a^x > 0 \geq b, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.

Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Ví dụ 1

a) $3^x > 81 \Leftrightarrow x > \log_3 81 \Leftrightarrow x > 4$;

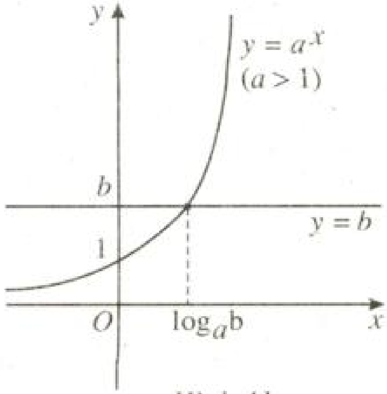
b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{1}{2}} 32 \Leftrightarrow x < -5$.

Minh hoạ bằng đồ thị

Vẽ đồ thị hàm số $y = a^x$ và đường thẳng $y = b$ trên cùng một hệ trục toạ độ.

Trong trường hợp $a > 1$ ta nhận thấy :

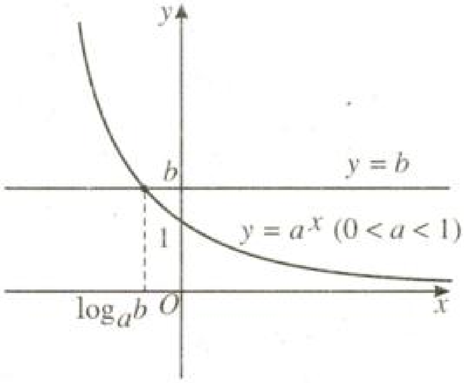
- Nếu $b \leq 0$ thì $a^x > b$ với mọi x.
- Nếu $b > 0$ thì $a^x > b$ với $x > \log_a b$ (H. 41).



Hình 41

Trường hợp $0 < a < 1$, ta có :

- Nếu $b \leq 0$ thì $a^x > b$ với mọi x.
- Nếu $b > 0$ thì $a^x > b$ với $x < \log_a b$ (H. 42).



Hình 42

Kết luận. Tập nghiệm của bất phương trình $a^x > b$ được cho trong bảng sau :

$a^x > b$	*Tập nghiệm*	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$b \leq 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$b > 0$	$(\log_a b\,;+\infty)$	$(-\infty\,;\log_a b)$

1

Hãy lập bảng tương tự cho các bất phương trình $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$.

2. Bất phương trình mũ đơn giản

Dưới đây là một số ví dụ về bất phương trình mũ đơn giản.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $3^{x^2 - x} < 9$.

Giải. Bất phương trình đã cho có thể viết ở dạng

$$3^{x^2 - x} < 3^2.$$

Vì cơ số 3 lớn hơn 1 nên $x^2 - x < 2$.

Đây là bất phương trình bậc hai quen thuộc. Giải bất phương trình này, ta được $-1 < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là khoảng $(-1\ ;\ 2)$.

Ví dụ 3. Giải bất phương trình $4^x - 2.5^{2x} < 10^x$.

Giải. Chia hai vế của bất phương trình cho 10^x, ta được

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x - 2\left(\frac{5}{2}\right)^x < 1.$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ $(t > 0)$, ta có bất phương trình

$$t - \frac{2}{t} < 1 \text{ hay } \frac{t^2 - t - 2}{t} < 0.$$

Giải bất phương trình này với điều kiện $t > 0$, ta được $0 < t < 2$. Do đó

$$0 < \left(\frac{2}{5}\right)^x < 2.$$

Vì cơ số $\frac{2}{5}$ nhỏ hơn 1 nên $x > \log_{\frac{2}{5}} 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(\log_{\frac{2}{5}} 2\ ;\ +\infty)$.

2

Giải bất phương trình $2^x + 2^{-x} - 3 < 0$.

II - BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

1. Bất phương trình lôgarit cơ bản

> Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.

Xét bất phương trình $\log_a x > b$.

Trường hợp $a > 1$, ta có

$$\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b.$$

Trường hợp $0 < a < 1$, ta có

$$\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b.$$

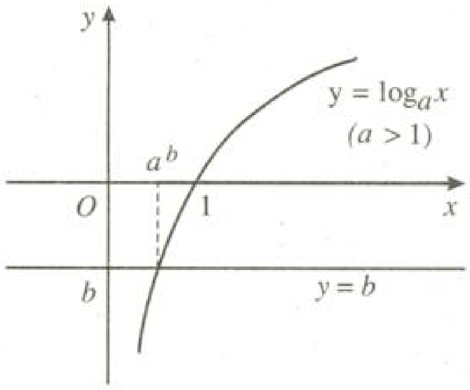
Ví dụ 4

a) $\log_2 x > 7 \Leftrightarrow x > 2^7 \Leftrightarrow x > 128$.

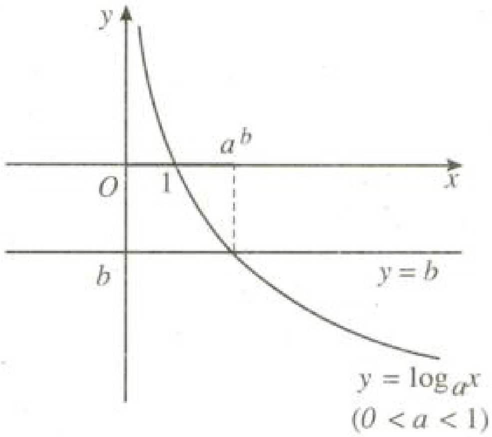
b) $\log_{\frac{1}{2}} x > 3 \Leftrightarrow 0 < x < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{8}$.

Minh hoạ bằng đồ thị

Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và đường thẳng $y = b$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H. 43, H. 44).



Hình 43



Hình 44

Quan sát đồ thị, ta thấy :

Trường hợp $a > 1$: $\log_a x > b$ khi và chỉ khi $x > a^b$.

Trường hợp $0 < a < 1$: $\log_a x > b$ khi và chỉ khi $0 < x < a^b$.

Kết luận : Nghiệm của bất phương trình $\log_a x > b$ được cho trong bảng sau :

$\log_a x > b$	$a > 1$	$0 < a < 1$
Nghiệm	$x > a^b$	$0 < x < a^b$

3 Hãy lập bảng tương tự cho các bất phương trình $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$.

2. Bất phương trình lôgarit đơn giản

Ta xét một số ví dụ về bất phương trình lôgarit đơn giản.

Ví dụ 5. Giải bất phương trình $\log_{0,5}(5x+10) < \log_{0,5}(x^2+6x+8)$.

Giải. Điều kiện của bất phương trình đã cho là

$$\begin{cases} 5x+10>0 \\ x^2+6x+8>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x<-4 \text{ hoặc } x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x>-2.$$

Vì cơ số 0,5 bé hơn 1 nên với điều kiện đó, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình $5x+10 > x^2+6x+8$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2<0 \Leftrightarrow -2<x<1.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là khoảng $(-2\,;\,1)$.

Ví dụ 6. Giải bất phương trình $\log_2(x-3)+\log_2(x-2) \le 1$.

Giải. Điều kiện của bất phương trình là $x>3$. Khi đó, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2[(x-3)(x-2)] \le \log_2 2.$$

Vì cơ số 2 lớn hơn 1 nên $(x-3)(x-2) \le 2$.

Giải bất phương trình này, ta tìm được $1 \le x \le 4$. Kết hợp với điều kiện $x>3$, ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $3 < x \le 4$.

4

Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$.

Bài tập

1. Giải các bất phương trình mũ :

a) $2^{-x^2+3x} < 4$;

b) $\left(\dfrac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \ge \dfrac{9}{7}$;

c) $3^{x+2}+3^{x-1} \le 28$;

d) $4^x - 3.2^x + 2 > 0$.

2. Giải các bất phương trình lôgarit :

a) $\log_8(4-2x) \geq 2$;

b) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$;

c) $\log_{0,2} x - \log_5(x-2) < \log_{0,2} 3$;

d) $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 \leq 0$.