§2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

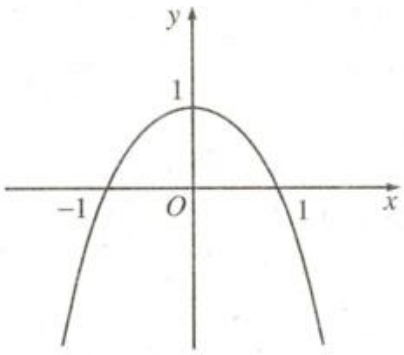
I – KHÁI NIỆM CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU

1

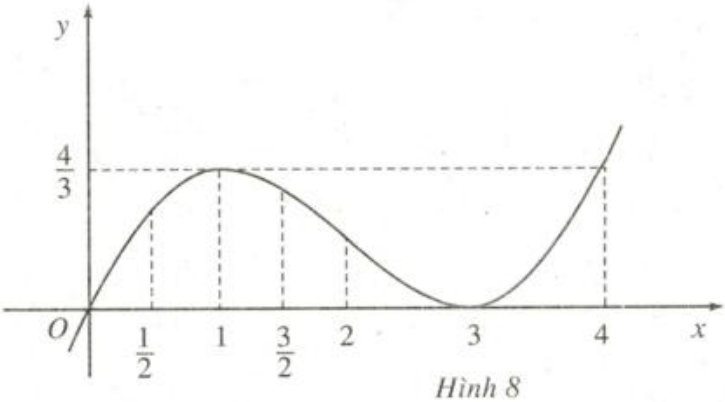
Dựa vào đồ thị (H.7, H.8), hãy chỉ ra các điểm tại đó mỗi hàm số sau có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) :

a) $y = -x^2 + 1$ trong khoảng $(-\infty ; +\infty)$;

b) $y = \frac{x}{3}(x-3)^2$ trong các khoảng $\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$ và $\left(\frac{3}{2} ; 4\right)$.



Hình 7



Hình 8

Xét dấu đạo hàm của các hàm số đã cho và điền vào các bảng dưới đây.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'					
y	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'							
y	$-\infty$	↗	$\frac{4}{3}$	↘	0	↗	$+\infty$

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a ; b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a ; b)$.

a) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h ; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.

b) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h ; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

CHÚ Ý

1. Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** (**điểm cực tiểu**) của hàm số ; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** (**giá trị cực tiểu**) của hàm số, kí hiệu là $f_{CĐ}(f_{CT})$, còn điểm $M(x_0 ; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** (**điểm cực tiểu**) của đồ thị hàm số.

2. Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là ***điểm cực trị.*** Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) còn gọi là **cực đại** (**cực tiểu**) và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.

3. Dễ dàng chứng minh được rằng, nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$ và đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

2

Giả sử $f(x)$ đạt cực đại tại x_0. Hãy chứng minh khẳng định 3 trong chú ý trên bằng cách xét giới hạn tỉ số $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ khi $\Delta x \to 0$ trong hai trường hợp $\Delta x > 0$ và $\Delta x < 0$.

II – ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

3

a) Sử dụng đồ thị, hãy xét xem các hàm số sau đây có cực trị hay không.

- $y = -2x + 1$;
- $y = \dfrac{x}{3}(x-3)^2$ (H.8).

b) Nêu mối liên hệ giữa sự tồn tại cực trị và dấu của đạo hàm.

Ta thừa nhận định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h ; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

a) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h ; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 ; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

b) Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h ; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 ; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

x	$x_0 - h$		x_0		$x_0 + h$
$f'(x)$		+		−	
$f(x)$		↗	$f_{CĐ}$	↘	

x	$x_0 - h$		x_0		$x_0 + h$
$f'(x)$		−		+	
$f(x)$		↘	f_{CT}	↗	

Ví dụ 1. Tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = -x^2 + 1$.

Giải. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = -2x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số và đồ thị của hàm số có một điểm cực đại (0 ; 1) (H.7).

Ví dụ 2. Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - x^2 - x + 3$.

Giải. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 2x - 1$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{86}{27}$	↘	2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $x = -\frac{1}{3}$ là điểm cực đại, $x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho.

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm số

$$y = \frac{3x+1}{x+1}.$$

Giải. Hàm số xác định tại mọi $x \neq -1$.

Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$.

Vậy hàm số đã cho không có cực trị (vì theo khẳng định 3 của Chú ý trên, nếu hàm số có cực trị tại x_0 thì tại đó $y' = 0$).

4

Chứng minh hàm số $y = |x|$ không có đạo hàm tại $x = 0$. Hàm số có đạt cực trị tại điểm đó không ?

III – QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ

Áp dụng Định lí 1, ta có quy tắc tìm cực trị sau đây.

QUY TẮC I

1. Tìm tập xác định.
2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.
3. Lập bảng biến thiên.
4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

5

Áp dụng quy tắc I, hãy tìm các điểm cực trị của hàm số

$$f(x) = x(x^2 - 3).$$

Ta thừa nhận định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 2

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h\,;\, x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó :

a) Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu ;

b) Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

Áp dụng Định lí 2, ta có quy tắc sau đây để tìm các điểm cực trị của một hàm số.

QUY TẮC II

1. Tìm tập xác định.

2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ là các nghiệm của nó.

3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i.

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 6.$$

Giải. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2.$

$f''(x) = 3x^2 - 4.$

$f''(\pm 2) = 8 > 0 \Rightarrow x = -2$ và $x = 2$ là hai điểm cực tiểu ;

$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại.

Kết luận

$f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$ và $x = 2$; $f_{CT} = f(\pm 2) = 2.$

$f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ và $f_{CĐ} = f(0) = 6.$

Ví dụ 5. Tìm các điểm cực trị của hàm số $f(x) = \sin 2x$.

Giải. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 2\cos 2x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + l\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2}$ $(l \in \mathbb{Z})$.

$f''(x) = -4\sin 2x.$

$$f''\left(\frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2}\right) = -4\sin\left(\frac{\pi}{2} + l\pi\right) = \begin{cases} -4 \text{ nếu } l = 2k \\ 4 \text{ nếu } l = 2k+1 \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ là các điểm cực đại của hàm số.

$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ là các điểm cực tiểu của hàm số.

Bài tập

1. Áp dụng Quy tắc I, hãy tìm các điểm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$; b) $y = x^4 + 2x^2 - 3$;

c) $y = x + \frac{1}{x}$; d) $y = x^3(1 - x)^2$;

e) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

2. Áp dụng Quy tắc II, hãy tìm các điểm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = x^4 - 2x^2 + 1$; b) $y = \sin 2x - x$;

c) $y = \sin x + \cos x$; d) $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$.

3. Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{|x|}$ không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng vẫn đạt cực tiểu tại điểm đó.

4. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số

$$y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$$

luôn luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

5. Tìm a và b để các cực trị của hàm số

$$y = \frac{5}{3}a^2x^3 + 2ax^2 - 9x + b$$

đều là những số dương và $x_0 = -\frac{5}{9}$ là điểm cực đại.

6. Xác định giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.