§4 ĐƯỜNG TIỆM CẬN

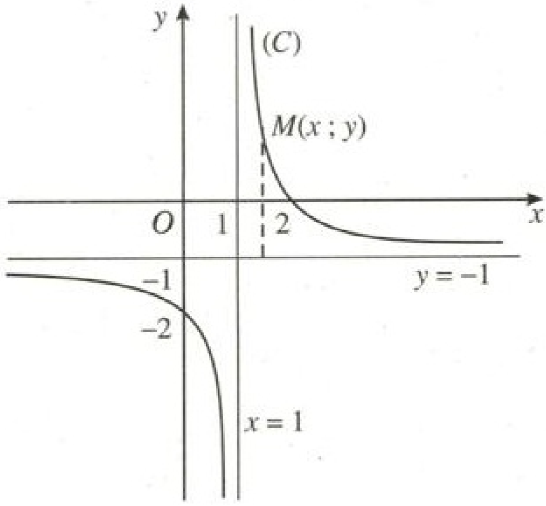
I – ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

1 Cho hàm số

$$y = \frac{2-x}{x-1} \text{ (H.16).}$$

có đồ thị (C).

Nêu nhận xét về khoảng cách từ điểm $M(x\,;\,y) \in (C)$ tới đường thẳng $y = -1$ khi $|x| \to +\infty$.



Hình 16

Ví dụ 1. Quan sát đồ thị (C) của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2 \text{ (H.17).}$$

Nêu nhận xét về khoảng cách từ điểm $M(x\,;\,y) \in (C)$ tới đường thẳng $y = 2$ khi $|x| \to +\infty$ và các giới hạn

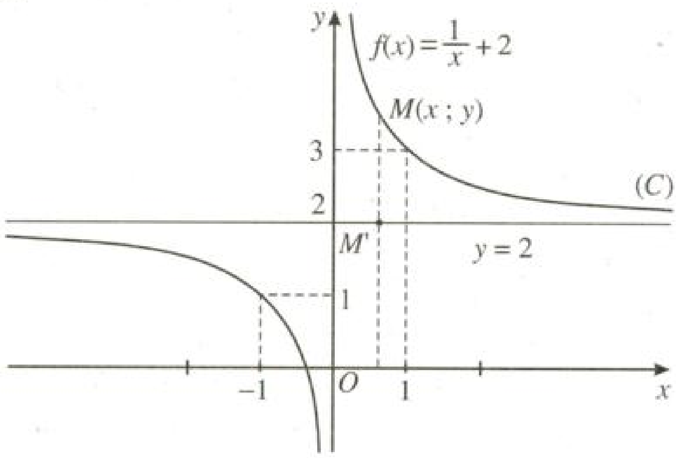
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2],\ \lim_{x\to-\infty}[f(x)-2].$$

Giải. Kí hiệu M, M' lần lượt là các điểm thuộc (C) và đường thẳng $y = 2$ có cùng hoành độ x (H.17). Khi $|x|$ càng lớn thì các điểm M, M' trên các đồ thị càng gần nhau.

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2] = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{x}+2\right)-2\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Tương tự, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-2] = 0.$



Hình 17

CHÚ Ý

Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, ta viết chung là $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$.

ĐỊNH NGHĨA

> Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a\,;+\infty)$, $(-\infty\,;\,b)$ hoặc $(-\infty\,;+\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn
>
> $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0.$$

Trong Ví dụ 1, đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đường hypebol $y = \frac{1}{x} + 2$.

Ví dụ 2. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$$

xác định trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$ vì

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \right) = 1.$$

II – ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

2

Tính $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} + 2 \right)$ và nêu nhận xét về khoảng cách MH khi $x \to 0$ (H.17).

ĐỊNH NGHĨA

> Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn
>
> $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty,$$
>
> $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty.$$

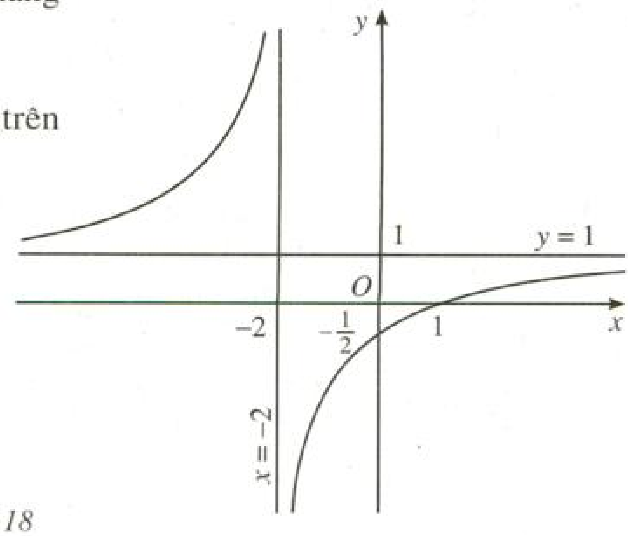
Ví dụ 3. Tìm các tiệm cận đứng và ngang của đồ thị (C) của hàm số

$$y = \frac{x-1}{x+2}.$$

Giải. Vì $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{x-1}{x+2} = -\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{x-1}{x+2} = +\infty$) nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của (C).

Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-1}{x+2} = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C).

Đồ thị của hàm số được cho trên Hình 18.



Hình 18

Ví dụ 4. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{2x - 3}$.

Giải. Vì $\lim\limits_{x \to \left(\frac{3}{2}\right)^+} \dfrac{2x^2 + x + 1}{2x - 3} = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x \to \left(\frac{3}{2}\right)^-} \dfrac{2x^2 + x + 1}{2x - 3} = -\infty$) nên đường thẳng $x = \dfrac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài tập

1. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số :

a) $y = \dfrac{x}{2 - x}$; b) $y = \dfrac{-x + 7}{x + 1}$;

c) $y = \dfrac{2x - 5}{5x - 2}$; d) $y = \dfrac{7}{x} - 1$.

2. Tìm các tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số :

a) $y = \dfrac{2 - x}{9 - x^2}$; b) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{3 - 2x - 5x^2}$;

c) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$; d) $y = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$.