§3 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I – ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

a) Số M được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu $M = \max\limits_{D} f(x)$.

b) Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu $m = \min\limits_{D} f(x)$.

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = x - 5 + \frac{1}{x}$$

trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

Giải. Trên khoảng $(0 ; +\infty)$, ta có $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0 ; +\infty)$ hàm số có giá trị cực tiểu duy nhất, đó cũng là giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = -3$ (tại $x = 1$). Không tồn tại giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên khoảng $(0\,;+\infty)$.

II – CÁCH TÍNH GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

1

Xét tính đồng biến, nghịch biến và tính giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số :

a) $y = x^2$ trên đoạn $[-3\,;0]$;

b) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[3\,;5]$.

1. Định lí

> Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

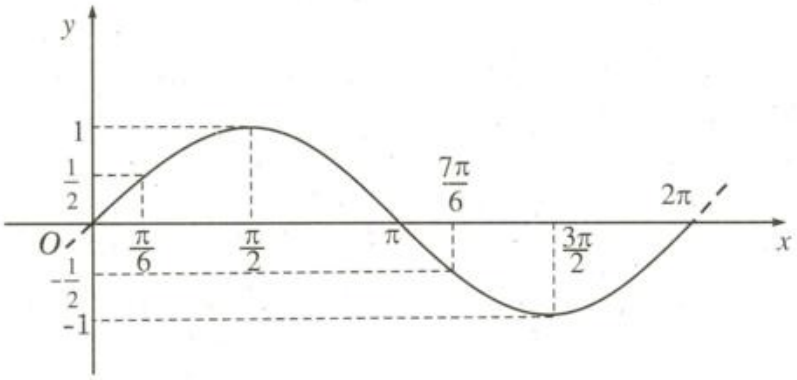
Ta thừa nhận định lí này.

Ví dụ 2. Tính giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin x$

a) Trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{7\pi}{6}\right]$;

b) Trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;2\pi\right]$.

Giải



Hình 9

Từ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ (H.9), ta thấy ngay :

a) Trên đoạn $D = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$ ta có

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\ ;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\ ;\ y\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Từ đó $\max\limits_{D} y = 1$; $\min\limits_{D} y = -\frac{1}{2}$.

b) Trên đoạn $E = \left[\frac{\pi}{6}; 2\pi\right]$ ta có

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1,\ y(2\pi) = 0.$$

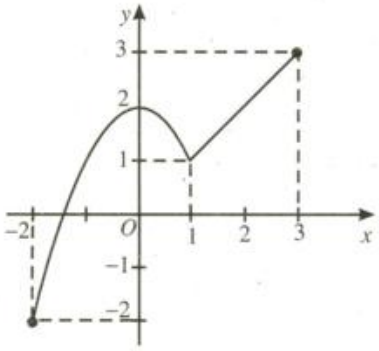
Vậy $\max\limits_{E} y = 1$; $\min\limits_{E} y = -1$.

2. Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một đoạn

2

Cho hàm số $y = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{nếu } -2 \le x \le 1 \\ x & \text{nếu } 1 < x \le 3 \end{cases}$

có đồ thị như Hình 10. Hãy chỉ ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn [−2 ; 3] và nêu cách tính.



Hình 10

NHẬN XÉT

Nếu đạo hàm $f'(x)$ giữ nguyên dấu trên đoạn $[a ; b]$ thì hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên cả đoạn. Do đó, $f(x)$ đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tại các đầu mút của đoạn.

Nếu chỉ có một số hữu hạn các điểm x_i $(x_i < x_{i+1})$ mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không xác định thì hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên mỗi khoảng $(x_i ; x_{i+1})$. Rõ ràng giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số trên đoạn $[a ; b]$ là số lớn nhất (số nhỏ nhất) trong các giá trị của hàm số tại hai đầu mút a, b và tại các điểm x_i nói trên.

Quy tắc

1. Tìm các điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ trên khoảng $(a\ ;\ b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

2. Tính $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$,..., $f(x_n)$, $f(b)$.

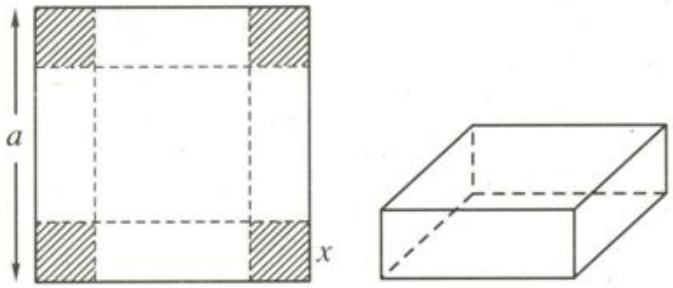
3. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Ta có

$$M = \max_{[a;\, b]} f(x)\,,\ m = \min_{[a;\, b]} f(x)\,.$$

CHÚ Ý

Hàm số liên tục trên một khoảng có thể không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó. Chẳng hạn, hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0\ ;\ 1)$. Tuy nhiên, cũng có những hàm số có giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất trên một khoảng như trong Ví dụ 3 dưới đây.

Ví dụ 3. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a. Người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại như Hình 11 để được một cái hộp không nắp. Tính cạnh của các hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất.



Hình 11

Giải. Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt.

Rõ ràng x phải thoả mãn điều kiện $0 < x < \dfrac{a}{2}$.

Thể tích của khối hộp là

$$V(x) = x(a - 2x)^2 \quad \left(0 < x < \frac{a}{2}\right).$$

Ta phải tìm $x_0 \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$ sao cho $V(x_0)$ có giá trị lớn nhất.

Ta có $\quad V'(x) = (a - 2x)^2 + x.2(a - 2x).(-2) = (a - 2x)(a - 6x)$.

Trên khoảng $\left(0 ; \frac{a}{2}\right)$, ta có

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2a^3}{27}$	$\searrow$	0

Từ bảng trên ta thấy trong khoảng $\left(0 ; \frac{a}{2}\right)$ hàm số có một điểm cực trị duy nhất là điểm cực đại $x = \frac{a}{6}$ nên tại đó $V(x)$ có giá trị lớn nhất :

$$\max_{\left(0; \frac{a}{2}\right)} V(x) = \frac{2a^3}{27}.$$

3

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên tập xác định.

Bài tập

1. Tính giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số :

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên các đoạn $[-4 ; 4]$ và $[0 ; 5]$;

b) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên các đoạn $[0 ; 3]$ và $[2 ; 5]$;

c) $y = \dfrac{2 - x}{1 - x}$ trên các đoạn $[2 ; 4]$ và $[-3 ; -2]$;

d) $y = \sqrt{5 - 4x}$ trên đoạn $[-1 ; 1]$.

2. Trong số các hình chữ nhật cùng có chu vi 16 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

3. Trong tất cả các hình chữ nhật cùng có diện tích 48 m^2, hãy xác định hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất.

4. Tính giá trị lớn nhất của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{4}{1 + x^2}$; b) $y = 4x^3 - 3x^4$.

5. Tính giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

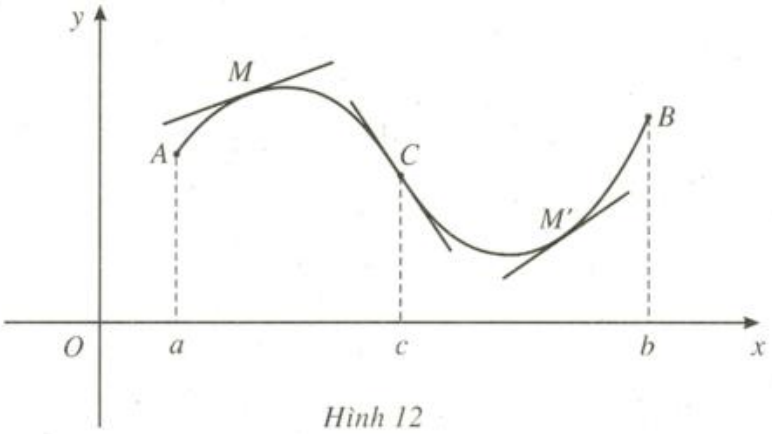
a) $y = |x|$; b) $y = x + \dfrac{4}{x}$ $(x > 0)$.

BÀI ĐỌC THÊM

CUNG LỒI, CUNG LÕM VÀ ĐIỂM UỐN

1. Khái niệm về cung lồi, cung lõm và điểm uốn

Xét đồ thị ACB của hàm số $y = f(x)$ biểu diễn trên Hình 12. Giả sử đồ thị có tiếp tuyến tại mọi điểm.



Hình 12

Tại mọi điểm của cung $\overset{\frown}{AC}$, tiếp tuyến luôn luôn ở phía trên của $\overset{\frown}{AC}$. Ta nói $\overset{\frown}{AC}$ là một **cung lồi**. Nếu a là hoành độ của điểm A, c là hoành độ của điểm C, thì khoảng $(a\,;c)$ được gọi là một **khoảng lồi** của đồ thị.

Tại mọi điểm của cung $\overset{\frown}{CB}$, tiếp tuyến luôn luôn ở phía dưới của $\overset{\frown}{CB}$. Ta nói $\overset{\frown}{CB}$ là một **cung lõm**. Kí hiệu b là hoành độ của điểm B thì khoảng $(c\,;b)$ được gọi là một **khoảng lõm** của đồ thị.

Điểm phân cách giữa cung lồi và cung lõm được gọi là **điểm uốn** của đồ thị. Trên Hình 12, C là một điểm uốn.

CHÚ Ý

1. Tại điểm uốn, tiếp tuyến đi xuyên qua đồ thị (H.12).
2. Trong một số giáo trình, nhất là giáo trình Giải tích toán học ở Đại học, người ta gọi $\overset{\frown}{AC}$ trên Hình 12 là cung lõm và $\overset{\frown}{CB}$ là cung lồi.

2. Dấu hiệu lồi, lõm và điểm uốn

Ta có hai định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a\,;b)$.

Nếu $f''(x) < 0$ với mọi $x \in (a\,;b)$ thì đồ thị của hàm số lồi trên khoảng đó.

Nếu $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (a\,;b)$ thì đồ thị của hàm số lõm trên khoảng đó.

ĐỊNH LÍ 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a\,;b)$ và $x_0 \in (a\,;b)$. Nếu $f''(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_0 thì điểm $M_0(x_0\,;f(x_0))$ là điểm uốn của đồ thị hàm số đã cho.

3. Áp dụng

Ví dụ 1. Tìm các khoảng lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị các hàm số :

a) $y = x^5$; b) $y = -\sin x$ trên đoạn $[0\,;2\pi]$.

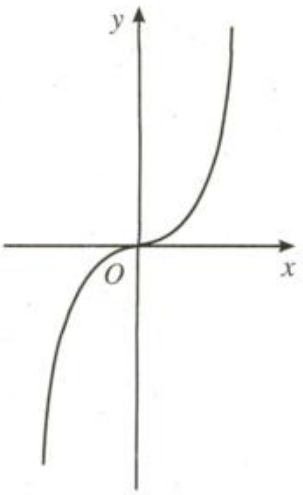
Giải

a) Tập xác định : $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$.

Bảng xét dấu y''

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	
Đồ thị của hàm số		Lồi	Điểm uốn $O(0\ ;\ 0)$	Lõm	



Hình 13

Vậy đồ thị hàm số lồi trên khoảng $(-\infty\ ;\ 0)$, lõm trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$. Điểm $O(0\ ;\ 0)$ là điểm uốn của đồ thị hàm số (H.13).

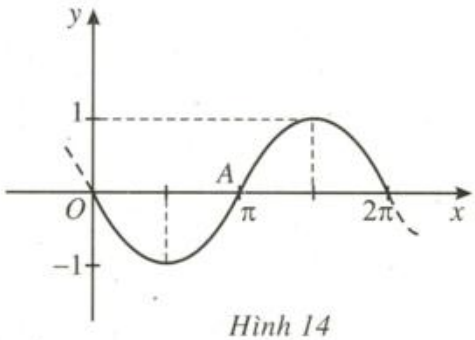
b) Ta có

$$y' = -\cos x, \qquad y'' = \sin x.$$

Bảng xét dấu y''

x	0		π		2π
y''		$+$	0	$-$	
Đồ thị của hàm số		Lõm	Điểm uốn $A(\pi\ ;\ 0)$	Lồi	

Vậy trên đoạn $[0\ ;\ 2\pi)$, đồ thị hàm số lõm trên khoảng $(0\ ;\ \pi)$, lồi trên khoảng $(\pi\ ;\ 2\pi)$. Điểm $A(\pi\ ;\ 0)$ là điểm uốn của đồ thị hàm số (H.14).



Hình 14

Ví dụ 2. Tìm các khoảng lồi, lõm của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x+1}{x-1}.$$

Giải. Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = -\frac{2}{(x-1)^2}, \text{ xác định với mọi } x \neq 1\ ;$$

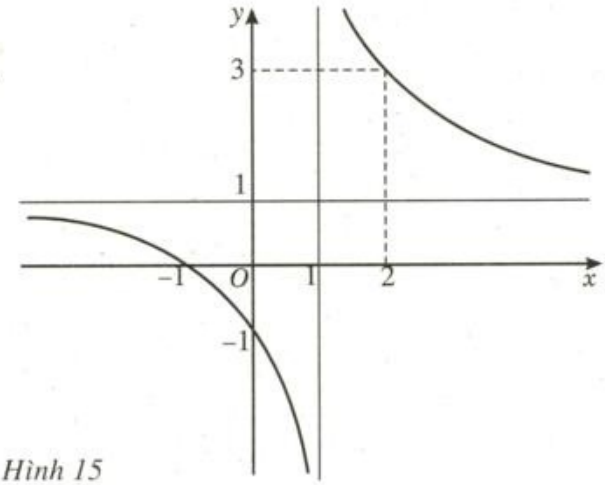
$$y'' = \frac{4}{(x-1)^3}, \text{ xác định với mọi } x \neq 1.$$

Bảng xét dấu y''

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		$-$	‖	$+$	
Đồ thị của hàm số		Lồi		Lõm	

Vậy đồ thị của hàm số lồi trên khoảng $(-\infty\ ;\ 1)$ và lõm trên khoảng $(1\ ;\ +\infty)$.

(Đồ thị không có điểm uốn vì hàm số không xác định tại điểm $x = 1$) (H.15).



Hình 15