§2 HÀM SỐ LUỸ THỪA

I – KHÁI NIỆM

Ta đã biết các hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $(x > 0)$.

Bây giờ, ta xét hàm số $y = x^\alpha$ với α là số thực cho trước.

Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là **hàm số luỹ thừa**.

Chẳng hạn, các hàm số $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^4}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = x^\pi$ là những hàm số luỹ thừa.

1

Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ đồ thị của các hàm số sau và nêu nhận xét về tập xác định của chúng : $y = x^2$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{-1}$.

CHÚ Ý

Tập xác định của hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ tuỳ thuộc vào giá trị của α. Cụ thể,

Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$;

Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

Với α không nguyên, tập xác định là $(0 ; +\infty)$.

II – ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LUỸ THỪA

Ở lớp 11, ta đã biết đạo hàm của các hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$ và $y = \sqrt{x}$ là

$$(x^n)' = nx^{n-1} \ (x \in \mathbb{R});$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ hay } \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \ (x > 0).$$

Một cách tổng quát, người ta chứng minh được hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.}$$

Ví dụ 1

a) $\left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} \ (x > 0)$;

b) $\left(x^{\sqrt{3}}\right)' = \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1} \ (x > 0)$.

2

Tính đạo hàm của các hàm số :

$$y = x^{-\frac{2}{3}}, \quad y = x^{\pi}, \quad y = x^{\sqrt{2}}.$$

CHÚ Ý

Công thức tính đạo hàm của hàm hợp đối với hàm số luỹ thừa có dạng

$$\boxed{(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}.u'.}$$

Ví dụ 2

$$\left((2x^2+x-1)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}(2x^2+x-1)^{-\frac{1}{3}}(2x^2+x-1)'$$
$$= \frac{2(4x+1)}{3\sqrt[3]{2x^2+x-1}}.$$

3

Tính đạo hàm của hàm số $y = (3x^2-1)^{-\sqrt{2}}$.

III – KHẢO SÁT HÀM SỐ LUỸ THỪA $y = x^{\alpha}$

Tập xác định của hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ luôn chứa khoảng $(0\,;+\infty)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số $y = x^{\alpha}$ trên khoảng này (gọi là **tập khảo sát**).

$y = x^{\alpha},\ \alpha > 0$	$y = x^{\alpha},\ \alpha < 0$
1. Tập khảo sát : $(0\,;+\infty)$.	1. Tập khảo sát : $(0\,;+\infty)$.
2. Sự biến thiên	2. Sự biến thiên
$y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0,\quad \forall x > 0.$	$y' = \alpha x^{\alpha-1} < 0,\quad \forall x > 0.$
Giới hạn đặc biệt :	Giới hạn đặc biệt :
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha} = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty.$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha} = +\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = 0.$
Tiệm cận : Không có.	Tiệm cận : Trục Ox là tiệm cận ngang, Trục Oy là tiệm cận đứng của đồ thị.

3. Bảng biến thiên

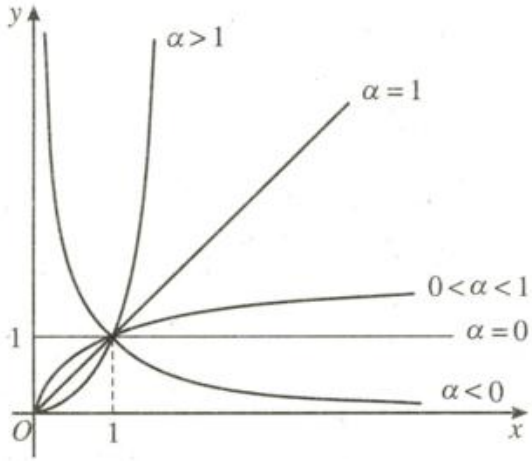
x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Đồ thị (H. 28 với $\alpha > 0$).

3. Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0

4. Đồ thị (H. 28 với $\alpha < 0$).



Hình 28

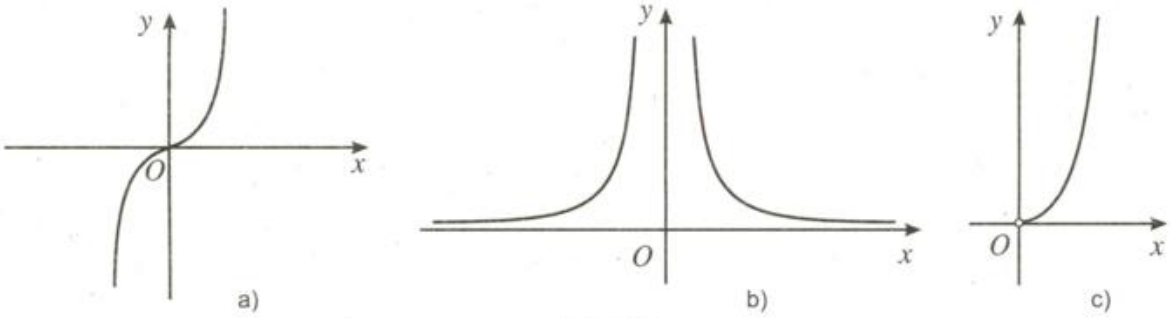
Đồ thị của hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm (1 ; 1).

Trên Hình 28 là đồ thị của hàm số luỹ thừa trên khoảng $(0 ; +\infty)$ ứng với các giá trị khác nhau của α.

CHÚ Ý

Khi khảo sát hàm số luỹ thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó.

Dưới đây là dạng đồ thị của ba hàm số : $y = x^3$ (H. 29a), $y = x^{-2}$ (H. 29b), $y = x^{\pi}$ (H. 29c).



Hình 29

Ví dụ 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^{-\frac{3}{4}}$.

1. Tập xác định : $D = (0 ; +\infty)$.

2. Sự biến thiên

Chiều biến thiên : $y' = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$.

Ta có $y' < 0$ trên khoảng $(0 ; +\infty)$ nên hàm số đã cho nghịch biến.

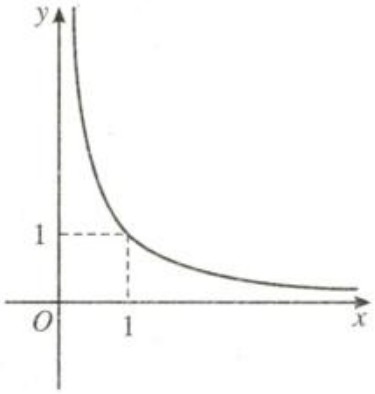
Tiệm cận : $\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$.

Đồ thị có tiệm cận ngang là trục hoành và có tiệm cận đứng là trục tung.

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0

3. Đồ thị (H.30).



Hình 30

Bảng tóm tắt các tính chất của hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ trên khoảng $(0 ; +\infty)$

	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
Đạo hàm	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$.	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$.
Chiều biến thiên	Hàm số luôn đồng biến.	Hàm số luôn nghịch biến.
Tiệm cận	Không có.	Tiệm cận ngang là trục Ox, tiệm cận đứng là trục Oy.
Đồ thị	Đồ thị luôn đi qua điểm $(1 ; 1)$.	

Bài tập

1. Tìm tập xác định của các hàm số :

a) $y = (1 - x)^{-\frac{1}{3}}$;

b) $y = (2 - x^2)^{\frac{3}{5}}$;

c) $y = (x^2 - 1)^{-2}$;

d) $y = (x^2 - x - 2)^{\sqrt{2}}$.

2. Tính đạo hàm của các hàm số :

a) $y = (2x^2 - x + 1)^{\frac{1}{3}}$; b) $y = (4 - x - x^2)^{\frac{1}{4}}$;

c) $y = (3x + 1)^{\frac{\pi}{2}}$; d) $y = (5 - x)^{\sqrt{3}}$.

3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số :

a) $y = x^{\frac{4}{3}}$; b) $y = x^{-3}$.

4. Hãy so sánh các số sau với 1 :

a) $(4,1)^{2,7}$; b) $(0,2)^{0,3}$;

c) $(0,7)^{3,2}$; d) $(\sqrt{3})^{0,4}$.

5. Hãy so sánh các cặp số sau :

a) $(3,1)^{7,2}$ và $(4,3)^{7,2}$; b) $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3}$ và $\left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$; c) $(0,3)^{0,3}$ và $(0,2)^{0,3}$;