§4 HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

I – HÀM SỐ MŨ

Ví dụ 1. Bài toán "lãi kép"

Một người gửi số tiền 1 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Hỏi người đó được lĩnh bao nhiêu tiền sau n năm ($n \in \mathbb{N}^*$), nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi ?

Giải. Giả sử $n \geq 2$. Gọi số vốn ban đầu là P, lãi suất là r. Ta có $P = 1$ (triệu đồng), $r = 0,07$.

• Sau năm thứ nhất :

Tiền lãi là $\quad T_1 = Pr = 1 \,.\, 0,07 = 0,07$ (triệu đồng).

Số tiền được lĩnh (còn gọi là vốn tích luỹ) là

$$P_1 = P + T_1 = P + Pr = P(1 + r) = 1,07 \text{ (triệu đồng)}.$$

• Sau năm thứ hai :

Tiền lãi là $\quad T_2 = P_1 r = 1,07 \,.\, 0,07 = 0,0749$ (triệu đồng).

Vốn tích luỹ là $P_2 = P_1 + T_2 = P_1 + P_1 r = P_1(1 + r)$

$$= P(1 + r)^2 = (1,07)^2 = 1,1449 \text{ (triệu đồng)}.$$

• Tương tự, vốn tích luỹ sau n năm là

$$P_n = P(1 + r)^n = (1,07)^n \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy sau n năm, người đó được lĩnh $(1,07)^n$ triệu đồng.

Ví dụ 2. Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức

$$m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}},$$

trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác).

Ví dụ 3. Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = Ae^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hàng năm.

1

Cho biết năm 2003, Việt Nam có 80 902 400 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47%. Hỏi năm 2010 Việt Nam sẽ có bao nhiêu người, nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi ?

Những bài toán thực tế như trên đưa đến việc xét các hàm số có dạng $y = a^x$.

1. Định nghĩa

Cho số thực dương a khác 1.

Hàm số $y = a^x$ được gọi là **hàm số mũ** cơ số a.

2

Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số mũ ? Với cơ số bao nhiêu ?

a) $y = (\sqrt{3})^x$; b) $y = 5^{\frac{x}{3}}$; c) $y = x^{-4}$; d) $y = 4^{-x}$.

2. Đạo hàm của hàm số mũ

Ta thừa nhận công thức

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1. \qquad (1)$$

ĐỊNH LÍ 1

Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm tại mọi x và

$$(e^x)' = e^x.$$

Chứng minh. Giả sử Δx là số gia của x, ta có

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1).$$

Do đó

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Áp dụng (1), ta có

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1.$$

Từ đó suy ra

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x.$$ ■

CHÚ Ý

Công thức đạo hàm của hàm hợp đối với hàm số e^u $(u = u(x))$ là $(e^u)' = u'.e^u$.

ĐỊNH LÍ 2

Hàm số $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ có đạo hàm tại mọi x và

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Chứng minh. Ta có

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}.$$

Đặt $u(x) = x \ln a$, theo Chú ý trên, ta được

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x \ln a.$$ ■

CHÚ Ý

Đối với hàm hợp $y = a^{u(x)}$, ta có

$$\boxed{(a^u)' = a^u \ln a \,.\, u'.}$$

Ví dụ 4. Hàm số $y = 8^{x^2+x+1}$ có đạo hàm là

$$y' = 8^{x^2+x+1}(x^2 + x + 1)' \ln 8 = 8^{x^2+x+1}(2x + 1) \ln 8.$$

3. Khảo sát hàm số mũ $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$

$y = a^x$, $a > 1$

1. Tập xác định : $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên

$$y' = a^x \ln a > 0, \quad \forall x.$$

Giới hạn đặc biệt

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$$

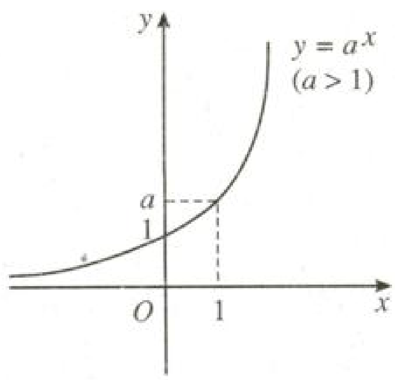
Tiệm cận :

Trục Ox là tiệm cận ngang.

3. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$+$	$+$	
y	0	1	a	$+\infty$

4. Đồ thị (H.31)



Hình 31

$y = a^x$, $0 < a < 1$

1. Tập xác định : $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên

$$y' = a^x \ln a < 0, \quad \forall x.$$

Giới hạn đặc biệt :

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

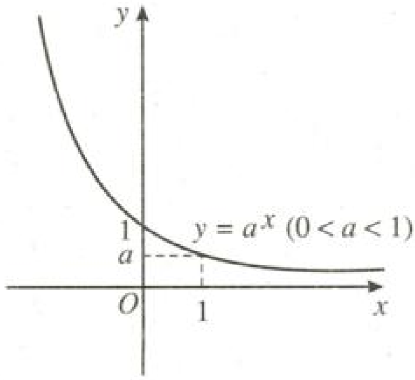
Tiệm cận :

Trục Ox là tiệm cận ngang.

3. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	
y	$+\infty$	1	a	0

4. Đồ thị (H.32)



Hình 32

Bảng tóm tắt các tính chất của hàm số mũ $y = a^x$ (a > 0, a ≠ 1)

Tập xác định	$(-\infty ; +\infty)$.
Đạo hàm	$y' = a^x \ln a$.
Chiều biến thiên	$a > 1$: hàm số luôn đồng biến ; $0 < a < 1$: hàm số luôn nghịch biến.
Tiệm cận	trục Ox là tiệm cận ngang.
Đồ thị	đi qua các điểm $(0 ; 1)$ và $(1 ; a)$, nằm phía trên trục hoành $(y = a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R})$.

II – HÀM SỐ LÔGARIT

1. Định nghĩa

Cho số thực dương a khác 1.

Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là **hàm số lôgarit** cơ số a.

Ví dụ 5. Các hàm số $y = \log_3 x$, $y = \log_{\frac{1}{4}} x$, $y = \log_{\sqrt{5}} x$, $y = \ln x$; $y = \log x$ là những hàm số lôgarit với cơ số lần lượt là 3, $\frac{1}{4}$, $\sqrt{5}$, e và 10.

2. Đạo hàm của hàm số lôgarit

Ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 3

Hàm số $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ có đạo hàm tại mọi $x > 0$ và

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Đặc biệt $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}.}$

CHÚ Ý

Đối với hàm hợp $y = \log_a u(x)$, ta có

$$\boxed{(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}.}$$

Ví dụ 6. Hàm số $y = \log_2(2x+1)$ có đạo hàm là

$$y' = (\log_2(2x+1))' = \frac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 2} = \frac{2}{(2x+1)\ln 2}.$$

3

Tìm đạo hàm của hàm số $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

3. Khảo sát hàm số lôgarit $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

$y = \log_a x,\ a > 1$

1. Tập xác định : $(0 ; +\infty)$.

2. Sự biến thiên

$$y' = \frac{1}{x\ln a} > 0, \quad \forall x > 0.$$

Giới hạn đặc biệt :

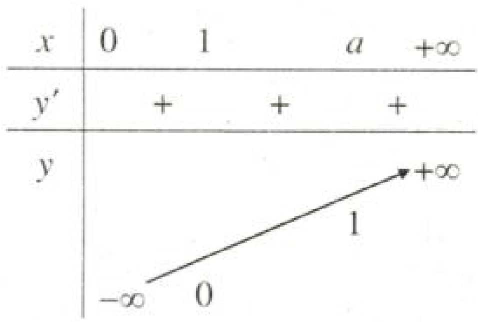
$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty.$$

Tiệm cận :

Trục Oy là tiệm cận đứng.

3. Bảng biến thiên



$y = \log_a x,\ 0 < a < 1$

1. Tập xác định : $(0 ; +\infty)$.

2. Sự biến thiên

$$y' = \frac{1}{x\ln a} < 0, \quad \forall x > 0.$$

Giới hạn đặc biệt :

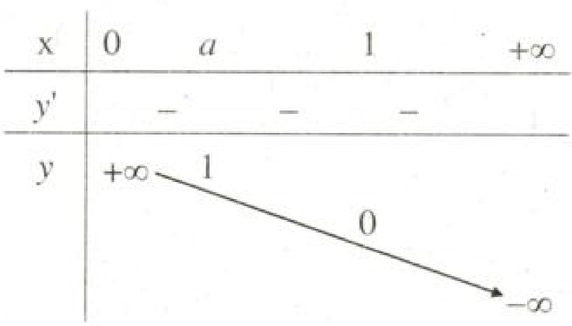
$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty.$$

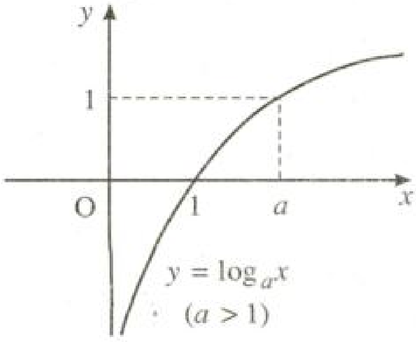
Tiệm cận :

Trục Oy là tiệm cận đứng.

3. Bảng biến thiên

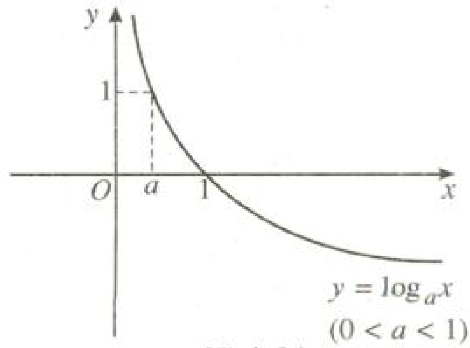


4. Đồ thị (H.33)



Hình 33

4. Đồ thị (H.34)



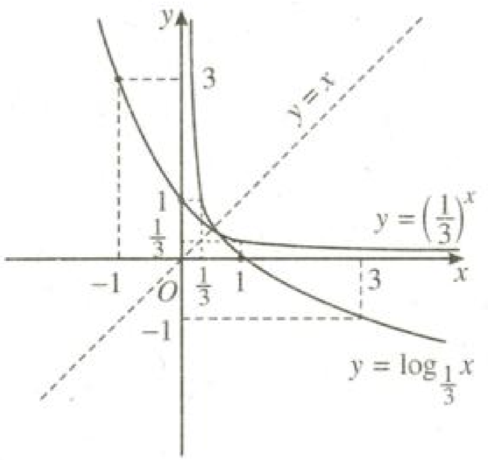
Hình 34

Bảng tóm tắt các tính chất của hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

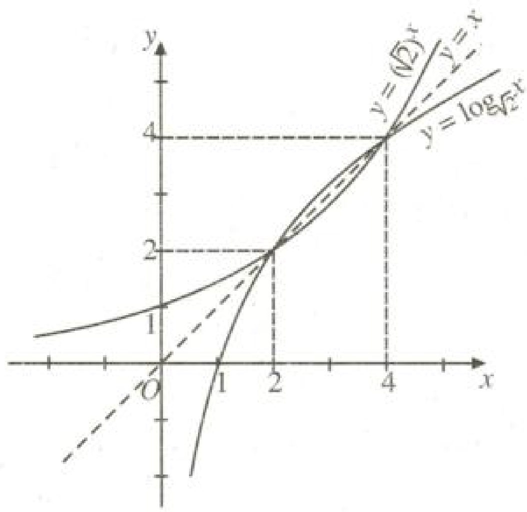
Tập xác định	$(0 ; +\infty)$.
Đạo hàm	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
Chiều biến thiên	$a > 1$: hàm số luôn đồng biến ; $0 < a < 1$: hàm số luôn nghịch biến.
Tiệm cận	trục Oy là tiệm cận đứng.
Đồ thị	đi qua các điểm $(1 ; 0)$ và $(a ; 1)$; nằm phía bên phải trục tung.

Dưới đây là đồ thị của các hàm số :

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ (H.35) ; $y = \log_{\sqrt{2}} x$, (H.36).



Hình 35



Hình 36

4

Nêu nhận xét về mối liên hệ giữa đồ thị của các hàm số trên Hình 35 và Hình 36.

NHẬN XÉT

Đồ thị của các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Bảng đạo hàm của các hàm số luỹ thừa, mũ, lôgarit

Hàm sơ cấp	Hàm hợp $(u = u(x))$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}.u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^u)' = e^u u'$ $(a^u)' = a^u.\ln a.u'$
$\left(\ln\lvert x\rvert\right)' = \frac{1}{x}$ $\left(\log_a \lvert x\rvert\right)' = \frac{1}{x \ln a}$	$\left(\ln\lvert u\rvert\right)' = \frac{u'}{u}$ $\left(\log_a \lvert u\rvert\right)' = \frac{u'}{u \ln a}$

Bài tập

1. Vẽ đồ thị của các hàm số :

a) $y = 4^x$; b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

2. Tính đạo hàm của các hàm số :

a) $y = 2xe^x + 3\sin 2x$; b) $y = 5x^2 - 2^x \cos x$; c) $y = \frac{x+1}{3^x}$.

3. Tìm tập xác định của các hàm số :

a) $y = \log_2(5 - 2x)$; b) $y = \log_3(x^2 - 2x)$;

c) $y = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4x + 3)$; d) $y = \log_{0,4} \frac{3x+2}{1-x}$.

4. Vẽ đồ thị của các hàm số :

a) $y = \log x$;   b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

5. Tính đạo hàm của các hàm số :

a) $y = 3x^2 - \ln x + 4\sin x$;

b) $y = \log(x^2 + x + 1)$;

c) $y = \dfrac{\log_3 x}{x}$.