§5 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

I – SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Tập xác định

Tìm tập xác định của hàm số.

2. Sự biến thiên

- Xét chiều biến thiên của hàm số :
  + Tính đạo hàm y' ;
  + Tìm các điểm tại đó đạo hàm y' bằng 0 hoặc không xác định ;
  + Xét dấu đạo hàm y' và suy ra chiều biến thiên của hàm số.
- Tìm cực trị.
- Tìm các giới hạn tại vô cực, các giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).
- Lập bảng biến thiên. (Ghi các kết quả tìm được vào bảng biến thiên).

3. Đồ thị

Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị.

CHÚ Ý

1. Nếu hàm số tuần hoàn với chu kì T thì chỉ cần khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị trên một chu kì, sau đó tịnh tiến đồ thị song song với trục Ox.

2. Nên tính thêm toạ độ một số điểm, đặc biệt là toạ độ các giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ.

3. Nên lưu ý đến tính chẵn, lẻ của hàm số và tính đối xứng của đồ thị để vẽ cho chính xác.

II – KHẢO SÁT MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC VÀ HÀM PHÂN THỨC

1

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số đã học

$$y = ax + b, \qquad y = ax^2 + bx + c$$

theo sơ đồ trên.

1. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

Giải

1) Tập xác định : $\mathbb{R}$.

2) Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

$$y' = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2) ;$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Trên các khoảng $(-\infty ; -2)$ và $(0 ; +\infty)$, y' dương nên hàm số đồng biến.

Trên khoảng $(-2 ; 0)$, y' âm nên hàm số nghịch biến.

• Cực trị

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$; $y_{CĐ} = y(-2) = 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$; $y_{CT} = y(0) = -4$.

• Các giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} x^3\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}\right) = +\infty.$$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

3) Đồ thị

Ta có $x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x + 2)^2 = 0$

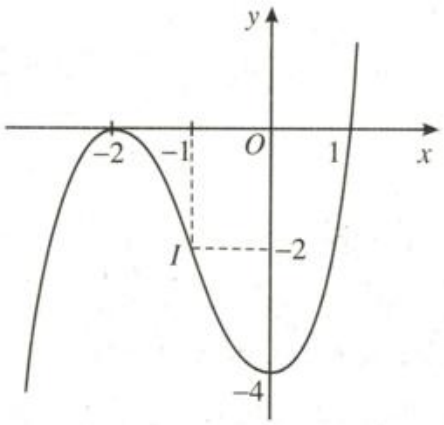
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Vậy $(-2 ; 0)$ và $(1 ; 0)$ là các giao điểm của đồ thị với trục Ox.

Vì $y(0) = -4$ nên $(0 ; -4)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy. Điểm đó cũng là điểm cực tiểu của đồ thị.

Đồ thị của hàm số được cho trên Hình 19.

Lưu ý. Đồ thị của hàm số bậc ba đã cho có tâm đối xứng là điểm I $(-1 ; -2)$ (H.19). Hoành độ của điểm I là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.



Hình 19

2

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. Nêu nhận xét về đồ thị của hàm số này với đồ thị của hàm số khảo sát trong Ví dụ 1.

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2.$$

Giải

1) Tập xác định : $\mathbb{R}$.

2) Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

Vì $y' = -3x^2 + 6x - 4 = -3(x-1)^2 - 1 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$,

nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$. Hàm số không có cực trị.

• Giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \left[-x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) \right] = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \left[-x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) \right] = +\infty.$$

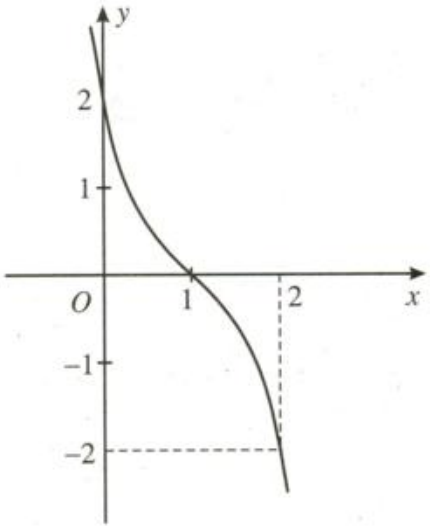
• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3) Đồ thị

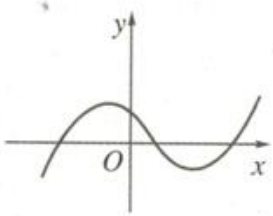
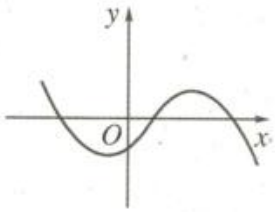
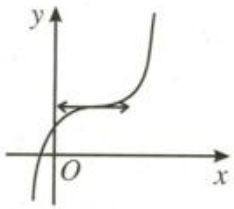
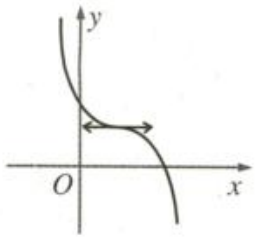
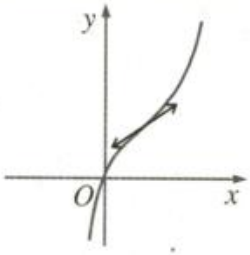
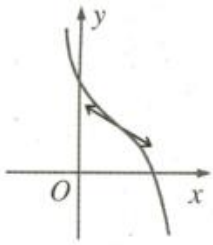
Đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại điểm $(1 ; 0)$, cắt trục Oy tại điểm $(0 ; 2)$.

Đồ thị của hàm số được cho trên Hình 20.



Hình 20

Dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

3

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + 1$.

2. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$

Ví dụ 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Giải

1. Tập xác định : $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)\ ;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Trên các khoảng $(-1\ ;\ 0)$ và $(1\ ;\ +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến.

Trên các khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$ và $(0\ ;\ 1)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến.

• Cực trị

Hàm số đạt cực tiểu tại hai điểm $x = -1$ và $x = 1$; $y_{CT} = y(\pm 1) = -4$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; $y_{CĐ} = y(0) = -3$.

• Giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^4\left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right) = +\infty.$$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

3. Đồ thị

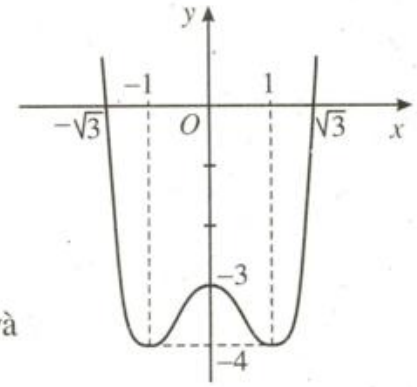
Hàm số đã cho là hàm số chẵn, vì

$y(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 3$

$\quad = x^4 - 2x^2 - 3 = y(x).$

Do đó, đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Đồ thị cắt trục hoành tại các điểm $(\sqrt{3}\ ;\ 0)$ và $(-\sqrt{3}\ ;\ 0)$, cắt trục tung tại điểm $(0\ ;\ -3)$ (H. 21).



Hình 21

4

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Bằng đồ thị, biện luận theo m số nghiệm của phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 = m$.

Ví dụ 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = -\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2}.$$

Giải

1. Tập xác định : $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

$$y' = -2x^3 - 2x = -2x(x^2 + 1)\ ;\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Trên khoảng $(-\infty\ ;\ 0)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến.

Trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến.

• Cực trị

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = y(0) = \dfrac{3}{2}$.

Hàm số không có điểm cực tiểu.

• Giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \left[-x^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x^4} \right) \right] = -\infty.$$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

3. Đồ thị

Hàm số đã cho là hàm số chẵn vì

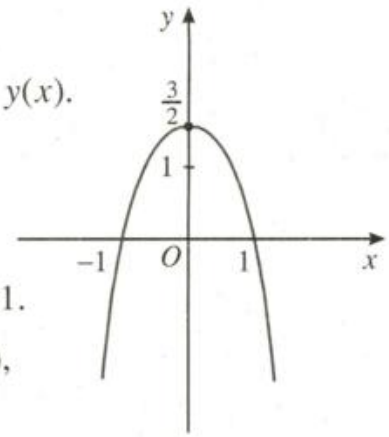
$$y(-x) = -\frac{(-x)^4}{2} - (-x)^2 + \frac{3}{2} = -\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2} = y(x).$$

Do đó, đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Mặt khác, $y = 0 \Leftrightarrow -x^4 - 2x^2 + 3 = 0$

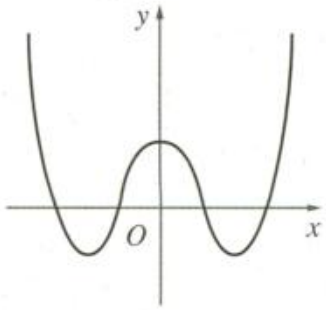
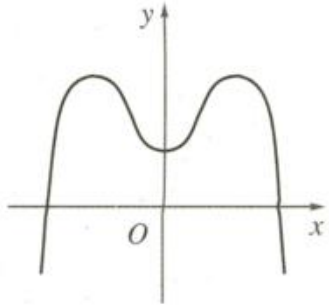
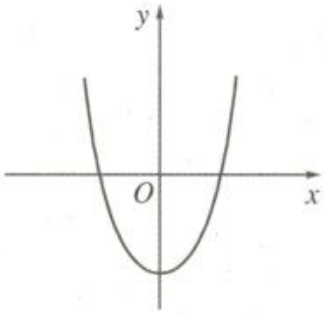
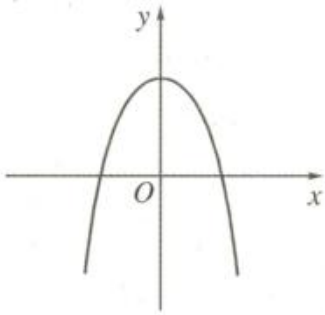
$$\Leftrightarrow -(x^2 - 1)(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Đồ thị cắt trục hoành tại các điểm $(-1\ ;\ 0)$ và $(1\ ;\ 0)$, cắt trục tung tại điểm $\left(0\ ;\dfrac{3}{2}\right)$ (H. 22).



Hình 22

Dạng của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có một nghiệm		

5

Lấy một ví dụ về hàm số dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ sao cho phương trình $y' = 0$ chỉ có một nghiệm.

3. Hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

Ví dụ 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{-x + 2}{x + 1}$.

Giải

1. Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. Sự biến thiên

• Chiều biến thiên $y' = \dfrac{-(x + 1) - (-x + 2)}{(x + 1)^2} = \dfrac{-3}{(x + 1)^2}$;

y' không xác định khi $x = -1$; y' luôn luôn âm với mọi $x \neq -1$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$ và $(-1\ ;\ +\infty)$.

• Cực trị

Hàm số đã cho không có cực trị.

• Tiệm cận $\lim\limits_{x \to -1^-} y = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{-x+2}{x+1} = -\infty$;

$$\lim_{x \to -1^+} y = \lim_{x \to -1^+} \frac{-x+2}{x+1} = +\infty.$$

Do đó, đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x+2}{x+1} = -1.$$

Vậy đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang.

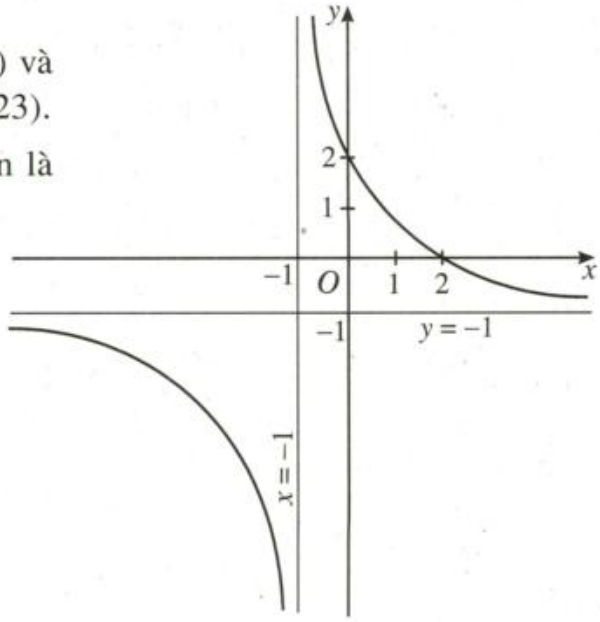
• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1

3. Đồ thị

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0\ ;\ 2)$ và cắt trục hoành tại điểm $(2\ ;\ 0)$ (H. 23).

Lưu ý. Giao điểm của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.



Hình 23

Ví dụ 6. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x-2}{2x+1}.$$

Giải

1. Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

2. Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

$$y' = \frac{2x+1-2(x-2)}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2};$$

y' không xác định khi $x = -\frac{1}{2}$;

y' luôn luôn dương với mọi $x \neq -\frac{1}{2}$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

• Cực trị

Hàm số đã cho không có cực trị.

• Tiệm cận

$$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} y = \lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{x-2}{2x+1} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} y = \lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{x-2}{2x+1} = -\infty.$$

Do đó, đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{2x+1} = \frac{1}{2}.$$

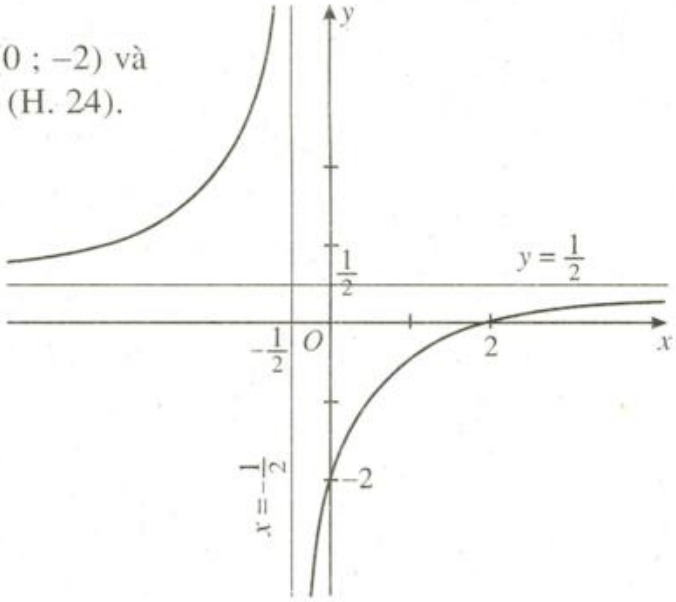
Vậy đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

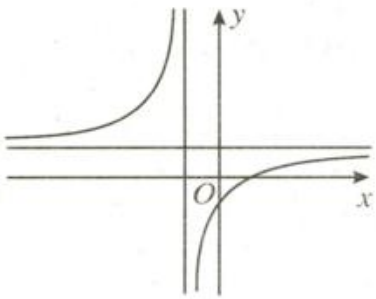
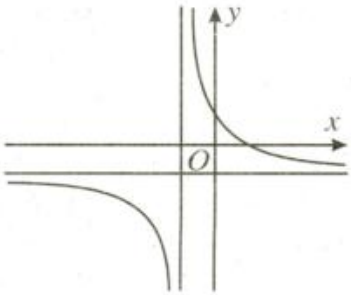
3. Đồ thị

Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0 ; –2) và cắt trục hoành tại điểm (2 ; 0) (H. 24).



Hình 24

Dạng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
	

III – SỰ TƯƠNG GIAO CỦA CÁC ĐỒ THỊ

6

Tìm toạ độ giao điểm của đồ thị hai hàm số

$$y = x^2 + 2x - 3,$$
$$y = -x^2 - x + 2.$$

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là (C_2). Để tìm hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2), ta phải giải phương trình $f(x) = g(x)$. Giả sử phương trình trên có các nghiệm là x_0, x_1, ... Khi đó, các giao điểm của (C_1) và (C_2) là $M_0(x_0 ; f(x_0))$, $M_1(x_1 ; f(x_1))$, ...

Ví dụ 7. Chứng minh rằng đồ thị (C) của hàm số

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

luôn luôn cắt đường thẳng (d) : $y = m - x$ với mọi giá trị của m.

Giải. (C) luôn cắt (d) nếu phương trình

$$\frac{x-1}{x+1} = m - x \qquad (1)$$

có nghiệm với mọi m.

Ta có

$$\frac{x-1}{x+1} = m - x \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = (x+1)(m-x) \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (2-m)x - m - 1 = 0 \\ x \neq -1. \end{cases} \qquad (2)$$

Xét phương trình (2), ta có $\Delta = m^2 + 8 > 0$ với mọi giá trị của m và $x = -1$ không thoả mãn (2) nên phương trình luôn có hai nghiệm khác -1. Vậy (C) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm.

Ví dụ 8

a) Vẽ đồ thị của hàm số

$$y = x^3 + 3x^2 - 2.$$

b) Sử dụng đồ thị, biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình

$$x^3 + 3x^2 - 2 = m. \qquad (3)$$

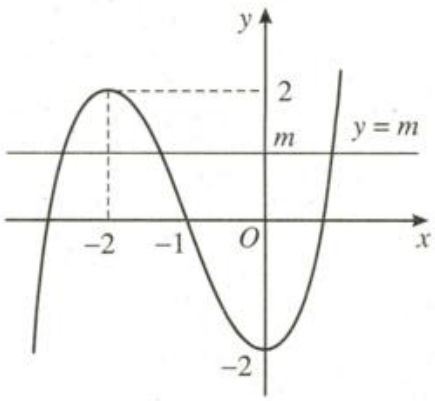
Giải

a) $y' = 3x^2 + 6x$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2.$

Đồ thị có điểm cực đại là $(-2 ; 2)$ và điểm cực tiểu là $(0 ; -2)$.

Đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ được biểu diễn trên Hình 25.



Hình 25

b) Số nghiệm của phương trình (3) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào đồ thị, ta suy ra kết quả biện luận về số nghiệm của phương trình (3).

$m > 2$: Phương trình (3) có một nghiệm.

$m = 2$: Phương trình (3) có hai nghiệm.

$-2 < m < 2$: Phương trình (3) có ba nghiệm.

$m = -2$: Phương trình (3) có hai nghiệm.

$m < -2$: Phương trình (3) có một nghiệm.

Bài tập

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số bậc ba sau :

a) $y = 2 + 3x - x^3$;

b) $y = x^3 + 4x^2 + 4x$;

c) $y = x^3 + x^2 + 9x$;

d) $y = -2x^3 + 5$.

2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số bậc bốn sau :

a) $y = -x^4 + 8x^2 - 1$;

b) $y = x^4 - 2x^2 + 2$;

c) $y = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2}$;

d) $y = -2x^2 - x^4 + 3$.

3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số phân thức :

a) $y = \frac{x+3}{x-1}$;

b) $y = \frac{1-2x}{2x-4}$;

c) $y = \frac{-x+2}{2x+1}$.

4. Bằng cách khảo sát hàm số, hãy tìm số nghiệm của các phương trình sau :

a) $x^3 - 3x^2 + 5 = 0$; b) $-2x^3 + 3x^2 - 2 = 0$; c) $2x^2 - x^4 = -1$.

5. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y = -x^3 + 3x + 1.$$

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận về số nghiệm của phương trình sau theo tham số m

$$x^3 - 3x + m = 0.$$

6. Cho hàm số $y = \dfrac{mx - 1}{2x + m}$.

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b) Xác định m để tiệm cận đứng của đồ thị đi qua $A(-1 ; \sqrt{2})$.

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 2$.

7. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 + m$.

a) Với giá trị nào của tham số m, đồ thị của hàm số đi qua điểm $(-1 ; 1)$?

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng $\dfrac{7}{4}$.

8. Cho hàm số

$$y = x^3 + (m + 3)x^2 + 1 - m \quad (m \text{ là tham số})$$

có đồ thị là (C_m).

a) Xác định m để hàm số có điểm cực đại là $x = -1$.

b) Xác định m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại $x = -2$.

9. Cho hàm số

$$y = \frac{(m + 1)x - 2m + 1}{x - 1} \quad (m \text{ là tham số})$$

có đồ thị là (G).

a) Xác định m để đồ thị (G) đi qua điểm $(0 ; -1)$.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với m tìm được.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị trên tại giao điểm của nó với trục tung.