§3 LÔGARIT

I – KHÁI NIỆM LÔGARIT

1 Tìm x để :

a) $2^x = 8$;   b) $2^x = \frac{1}{4}$;   c) $3^x = 81$;   d) $5^x = \frac{1}{125}$.

Cho số a dương, phương trình

$$a^\alpha = b$$

đưa đến hai bài toán ngược nhau :

- Biết α , tính b.
- Biết b , tính α.

Bài toán thứ nhất là tính luỹ thừa với số mũ thực của một số. Bài toán thứ hai dẫn đến khái niệm lấy lôgarit của một số. Người ta chứng minh được rằng với hai số dương $a, b, a \neq 1$, luôn tồn tại duy nhất số α sao cho $a^{\alpha} = b$.

1. Định nghĩa

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thoả mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là **lôgarit cơ số *a* của *b*** và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\boxed{\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b.}$$

Ví dụ 1

a) $\log_2 8 = 3$ vì $2^3 = 8$;

b) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ vì $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$.

2

a) Tính $\log_{\frac{1}{2}} 4$, $\log_3 \frac{1}{27}$.

b) Có các số x, y nào để $3^x = 0$, $2^y = -3$ hay không ?

CHÚ Ý

Không có lôgarit của số âm và số 0.

2. Tính chất

Cho hai số dương a và b, $a \neq 1$. Ta có các tính chất sau đây.

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1, \\ a^{\log_a b} = b,\ \log_a(a^{\alpha}) = \alpha. \end{array}}$$

3

Hãy chứng minh các tính chất trên.

Ví dụ 2

a) $3^{2\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^2 = 5^2 = 25$.

b) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3$.

4

Tính $4^{\log_2 \frac{1}{7}}, \left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}}$.

II – QUY TẮC TÍNH LÔGARIT

5

Cho $b_1 = 2^3$, $b_2 = 2^5$.

Tính $\log_2 b_1 + \log_2 b_2$; $\log_2 (b_1 b_2)$ và so sánh các kết quả.

1. Lôgarit của một tích

ĐỊNH LÍ 1

Cho ba số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

$$\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2 .$$

Lôgarit của một tích bằng tổng các lôgarit.

Chứng minh. Đặt $\alpha_1 = \log_a b_1$, $\alpha_2 = \log_a b_2$, ta có

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2 . \quad (1)$$

Mặt khác, vì $b_1 = a^{\alpha_1}$, $b_2 = a^{\alpha_2}$, suy ra $b_1 b_2 = a^{\alpha_1} . a^{\alpha_2} = a^{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Do đó $\alpha_1 + \alpha_2 = \log_a(b_1 b_2). \quad (2)$

Từ (1), (2) suy ra

$$\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2 .$$

■

Ví dụ 3. Tính $\log_6 9 + \log_6 4$.

Giải. $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6(9.4) = \log_6 36 = 2.$

CHÚ Ý

Định lí 1 có thể mở rộng cho tích của n số dương :

$$\log_a(b_1 b_2 ... b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + ... + \log_a b_n$$

$$(a, b_1, b_2, ..., b_n > 0, a \neq 1).$$

6

Tính $\log_{\frac{1}{2}} 2 + 2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{8}$.

2. Lôgarit của một thương

7

Cho $b_1 = 2^5$, $b_2 = 2^3$. Tính $\log_2 b_1 - \log_2 b_2$, $\log_2 \frac{b_1}{b_2}$ và so sánh các kết quả.

ĐỊNH LÍ 2

> Cho ba số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có
>
> $$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2.$$

Lôgarit của một thương bằng hiệu các lôgarit.

Đặc biệt $\boxed{\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b}$ $(a > 0, b > 0, a \neq 1)$.

Định lí 2 được chứng minh tương tự Định lí 1.

Ví dụ 4. Tính $\log_7 49 - \log_7 343$.

Giải. $$\log_7 49 - \log_7 343 = \log_7 \frac{49}{343} = \log_7 \frac{1}{7} = -\log_7 7 = -1.$$

3. Lôgarit của một luỹ thừa

ĐỊNH LÍ 3

> Cho hai số dương a, b ; $a \neq 1$. Với mọi α, ta có
>
> $$\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b.$$

Lôgarit của một luỹ thừa bằng tích của số mũ với lôgarit của cơ số.

Đặc biệt $\boxed{\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b.}$

Chứng minh. Đặt $\beta = \log_a b$ thì $b = a^\beta$.

Do đó $\qquad b^\alpha = (a^\beta)^\alpha = a^{\alpha\beta}$.

Suy ra $\qquad \alpha\beta = \log_a b^\alpha$ hay $\alpha \log_a b = \log_a b^\alpha$. ■

Ví dụ 5. Tính giá trị của các biểu thức :

a) $\log_2 4^{\frac{1}{7}}$; $\qquad$ b) $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 15$.

Giải

a) $\log_2 4^{\frac{1}{7}} = \log_2 2^{\frac{2}{7}} = \frac{2}{7}\log_2 2 = \frac{2}{7}$;

b) $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 15 = \log_5 \sqrt{3} - \log_5 \sqrt{15}$

$$= \log_5 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_5 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

III – ĐỔI CƠ SỐ

8
Cho $a = 4$, $b = 64$, $c = 2$. Tính $\log_a b$, $\log_c a$, $\log_c b$.
Tìm một hệ thức liên hệ giữa ba kết quả thu được.

ĐỊNH LÍ 4

Cho ba số dương a, b, c với $a \neq 1$, $c \neq 1$, ta có $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Đặc biệt $\qquad \boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}} \qquad (b \neq 1)$

$\qquad \boxed{\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b} \qquad (\alpha \neq 0)$.

Chứng minh. Theo tính chất của lôgarit và Định lí 3, ta có

$$\log_c b = \log_c(a^{\log_a b}) = \log_a b.\log_c a.$$

Vì $a \neq 1$ nên $\log_c a \neq 0$. Do đó

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$ ■

IV – VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 6. Tính :

a) $2^{\log_4 15}$;   b) $3^{\log_{\frac{1}{27}} 2}$.

Giải

a) Ta có $\log_4 15 = \log_{2^2} 15 = \frac{1}{2}\log_2 15 = \log_2 \sqrt{15}$.

Do đó $2^{\log_4 15} = 2^{\log_2 \sqrt{15}} = \sqrt{15}$.

b) Vì $\log_{\frac{1}{27}} 2 = \log_{3^{-3}} 2 = -\frac{1}{3}\log_3 2 = \log_3 2^{-\frac{1}{3}} = \log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

nên $3^{\log_{\frac{1}{27}} 2} = 3^{\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Ví dụ 7. Cho $\alpha = \log_2 20$. Hãy tính $\log_{20} 5$ theo α.

Giải. Ta có

$$\alpha = \log_2 20 = \log_2(2^2.5) = 2\log_2 2 + \log_2 5 = 2 + \log_2 5,$$

suy ra $\quad \log_2 5 = \alpha - 2$.

Vậy $\quad \log_{20} 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 20} = \frac{\alpha - 2}{\alpha}$.

Ví dụ 8. Rút gọn biểu thức

$$A = \log_{\frac{1}{3}} 7 + 2\log_9 49 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{7}.$$

Giải. Ta có

$$A = \log_{3^{-1}} 7 + 2\log_{3^2}(7^2) - \log_{3^{\frac{1}{2}}}(7^{-1})$$

$$= -\log_3 7 + 2\log_3 7 + 2\log_3 7 = 3\log_3 7.$$

Ví dụ 9. So sánh các số $\log_2 3$ và $\log_6 5$.

Giải. Đặt $\alpha = \log_2 3, \beta = \log_6 5$.

Ta có $2^\alpha = 3 > 2^1$ nên $\alpha > 1$; $6^\beta = 5 < 6^1$ nên $\beta < 1$.

Suy ra $\alpha > \beta$.

Vậy $\log_2 3 > \log_6 5$.

V – LÔGARIT THẬP PHÂN. LÔGARIT TỰ NHIÊN

1. Lôgarit thập phân

Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10.

$\log_{10} b$ thường được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$.

2. Lôgarit tự nhiên

Người ta chứng minh được dãy số (u_n) với $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ có giới hạn là một số vô tỉ và gọi giới hạn đó là e,

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Một giá trị gần đúng của e là $e \approx 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045$.

Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e.

$\log_e b$ được viết là $\ln b$.

CHÚ Ý

Muốn tính $\log_a b$, với $a \neq 10$ và $a \neq e$, bằng máy tính bỏ túi, ta có thể sử dụng công thức đổi cơ số.

Chẳng hạn,

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}584\ 962\ 501.$$

$$\log_3 0{,}8 = \frac{\ln 0{,}8}{\ln 3} \approx -0{,}203\ 114\ 013.$$

Bài tập

1. Không sử dụng máy tính, hãy tính :

a) $\log_2 \frac{1}{8}$; b) $\log_{\frac{1}{4}} 2$;

c) $\log_3 \sqrt[4]{3}$; d) $\log_{0,5} 0{,}125$.

2. Tính :

a) $4^{\log_2 3}$; b) $27^{\log_9 2}$;

c) $9^{\log_{\sqrt{3}} 2}$; d) $4^{\log_8 27}$.

3. Rút gọn biểu thức :

a) $\log_3 6.\log_8 9.\log_6 2$; b) $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$.

4. So sánh các cặp số sau :

a) $\log_3 5$ và $\log_7 4$;

b) $\log_{0,3} 2$ và $\log_5 3$;

c) $\log_2 10$ và $\log_5 30$.

5. a) Cho $a = \log_{30} 3$, $b = \log_{30} 5$. Hãy tính $\log_{30} 1350$ theo a, b.

b) Cho $c = \log_{15} 3$. Hãy tính $\log_{25} 15$ theo c.

BẠN CÓ BIẾT ?

AI ĐÃ PHÁT MINH RA LÔGARIT ?

J. Napier
(1550 – 1617)

Nê-pe (John Napier) là nhà toán học Xcốt-len (Scotland). Ông sinh năm 1550 tại Me-ti-ston (Metiston-Castle), gần thành phố Ê-đin-bơc (Edinburgh) và tốt nghiệp trường Đại học Tổng hợp Ê-đin-bơc.

Nê-pe là người phát minh ra lôgarit. Thuật ngữ "Lôgarit" do ông đề nghị xuất phát từ sự kết hợp hai từ Hi Lạp λόγος (đọc là "logos" có nghĩa là tỉ số) và 'αριθμ ός (đọc là "aritmos" có nghĩa là số). Trong toán học cổ, bình phương, lập phương, ... được gọi là *các tỉ số kép*, bội ba,... Như vậy, đối với Nê-pe, từ λόγos 'αρι θμós có nghĩa là "số tỉ số". Lôgarit được Nê-pe xem là số trợ giúp để tính tỉ số của hai số.

Trong tác phẩm "Mô tả bảng lôgarit kì diệu" (1614), Nê-pe đưa ra định nghĩa và các tính chất của lôgarit. Lôgarit mà Nê-pe xét có cơ số gần bằng $\frac{1}{e}$.

Thuật ngữ "Lôgarit tự nhiên" do Men-gô-li (P. Mengoli – 1659) và Men-ca-tơ (N. Mencator – 1668) đưa ra. Năm 1893, Prin-xêm (A. Pringshelm) đã kí hiệu lôgarit tự nhiên của số N bởi ln N. Bởi vậy, việc gọi lôgarit tự nhiên là lôgarit Nê-pe không có cơ sở. Tuy nhiên, người ta vẫn thường gọi như vậy có lẽ là do đã gắn lôgarit tự nhiên với tên người thiết lập bảng lôgarit đầu tiên.

Ngoài ra, Nê-pe còn là tác giả của một loạt các công thức dành cho việc giải các tam giác cầu, rất tiện lợi cho việc lấy lôgarit.

Ngày 4-4-1617, Nê-pe qua đời tại quê hương ông.