§1 LUỸ THỪA

I – KHÁI NIỆM LUỸ THỪA

1. Luỹ thừa với số mũ nguyên

1

Tính $(1,5)^4$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; $(\sqrt{3})^5$.

Cho n là một số nguyên dương.

Với a là số thực tuỳ ý, **luỹ thừa** bậc n của a là tích của n thừa số a

$$\boxed{a^n = \underbrace{a.a.\ \dots\ .a}_{n \text{ thừa số}}}$$

Với $a \neq 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &a^0 = 1, \\ &a^{-n} = \frac{1}{a^n}. \end{aligned}}$$

Trong biểu thức a^m, ta gọi a là **cơ số**, số nguyên m là **số mũ**.

CHÚ Ý.

0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

Luỹ thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự của luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{3}\right)^{-10}.27^{-3} + (0,2)^{-4}.25^{-2} + 128^{-1}.\left(\frac{1}{2}\right)^{-9}.$$

Giải. $A = 3^{10}.\frac{1}{27^3} + \frac{1}{0,2^4}.\frac{1}{25^2} + \frac{1}{128}.2^9 = 3 + 1 + 4 = 8.$

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức

$$B = \left[\frac{a\sqrt{2}}{(1+a^2)^{-1}} - \frac{2\sqrt{2}}{a^{-1}}\right].\frac{a^{-3}}{1-a^{-2}} \qquad (a \neq 0,\ a \neq \pm 1).$$

Giải. Với $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, ta có

$$B = \left[a\sqrt{2}(1 + a^2) - 2\sqrt{2}a\right] \cdot \frac{1}{a^3(1 - a^{-2})}$$

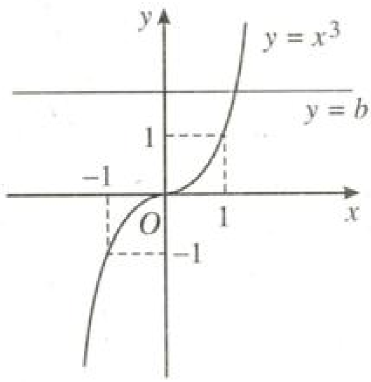
$$= \left(a\sqrt{2} + a^3\sqrt{2} - 2a\sqrt{2}\right) \cdot \frac{1}{a^3 - a}$$

$$= a\sqrt{2}(a^2 - 1) \cdot \frac{1}{a(a^2 - 1)} = \sqrt{2}.$$

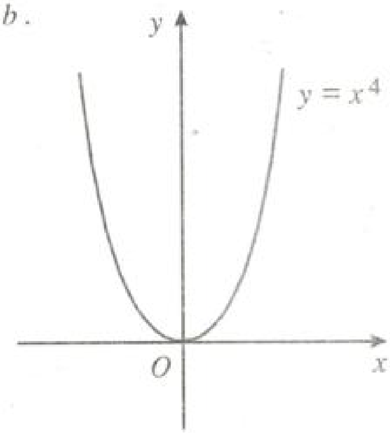
2. Phương trình $x^n = b$

2

Dựa vào đồ thị của các hàm số $y = x^3$ và $y = x^4$ (H.26, H.27), hãy biện luận theo b số nghiệm của các phương trình $x^3 = b$ và $x^4 = b$.



Hình 26



Hình 27

Đồ thị của hàm số $y = x^{2k+1}$ có dạng tương tự đồ thị hàm số $y = x^3$ và đồ thị hàm số $y = x^{2k}$ có dạng tương tự đồ thị hàm số $y = x^4$. Từ đó ta có kết quả biện luận số nghiệm của phương trình $x^n = b$ như sau :

a) Trường hợp n lẻ :

Với mọi số thực b, phương trình có nghiệm duy nhất.

b) Trường hợp n chẵn :

Với $b < 0$, phương trình vô nghiệm ;

Với $b = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$;

Với $b > 0$, phương trình có hai nghiệm đối nhau.

3. Căn bậc n

Cho số nguyên dương n, phương trình

$$a^n = b$$

đưa đến hai bài toán ngược nhau :

- Biết a, tính b.
- Biết b, tính a.

Bài toán thứ nhất là tính luỹ thừa của một số. Bài toán thứ hai dẫn đến khái niệm lấy căn của một số.

a) Khái niệm

> Cho số thực b và số nguyên dương n $(n \geq 2)$. Số a được gọi là **căn bậc n** của số b nếu $a^n = b$.

Chẳng hạn, 2 và -2 là các căn bậc 4 của 16 ; $-\frac{1}{3}$ là căn bậc 5 của $-\frac{1}{243}$.

Từ định nghĩa và kết quả biện luận về số nghiệm của phương trình $x^n = b$, ta có :

Với n lẻ và $b \in \mathbb{R}$: Có duy nhất một căn bậc n của b, kí hiệu là $\sqrt[n]{b}$.

Với n chẵn và
- $b < 0$: Không tồn tại căn bậc n của b ;
- $b = 0$: Có một căn bậc n của b là số 0 ;
- $b > 0$: Có hai căn trái dấu, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.

b) Tính chất của căn bậc n

Từ định nghĩa ta có các tính chất sau :

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \ ;$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \ ;$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \ ;$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a|, & \text{khi } n \text{ chẵn}; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

3

Chứng minh tính chất $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức :

a) $\sqrt[5]{4}.\sqrt[5]{-8}$; b) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$.

Giải

a) $\sqrt[5]{4}.\sqrt[5]{-8} = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2.$

b) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\right)^3} = \sqrt{3}.$

4. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

> Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Luỹ thừa của a với số mũ r là số a^r xác định bởi
>
> $$\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.}$$

Ví dụ 4. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$; $4^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{4^{-3}} = \dfrac{1}{\sqrt{4^3}} = \dfrac{1}{8}$;

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad (a > 0, n \geq 2).$$

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức

$$D = \frac{x^{\frac{5}{4}}y + xy^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} \quad (x, y > 0).$$

Giải. Với x và y là những số dương, theo định nghĩa, ta có

$$D = \frac{xy\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}} = xy.$$

5. Luỹ thừa với số mũ vô tỉ

Ở lớp dưới, ta đã biết số $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ được biểu diễn dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn :

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 562...$$

Gọi r_n là số hữu tỉ thành lập từ n chữ số đầu tiên dùng để viết $\sqrt{2}$ ở dạng thập phân, $n = 1, 2, ..., 10$.

Sử dụng máy tính, ta tính được 3^{r_n} tương ứng. Ta có bảng ghi các dãy số (r_n) và (3^{r_n}) với $n = 1, 2, ..., 10$ như sau :

n	r_n	3^{r_n}
1	1	3
2	1,4	4,655 536 722
3	1,41	4,706 965 002
4	1,414	4,727 695 035
5	1,4142	4,728 733 93
6	1,414 21	4,728 785 881
7	1,414 213	4,728 801 466
8	1,414 213 5	4,728 804 064
9	1,414 213 56	4,728 804 376
10	1,414 213 562	4,728 804 386

Người ta chứng minh được rằng khi $n \to +\infty$ thì dãy số (3^{r_n}) dần đến một giới hạn mà ta gọi là $3^{\sqrt{2}}$.

Sử dụng máy tính bỏ túi (có mười chữ số thập phân), ta có

$$3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}728\ 804\ 388.$$

Cho a là một số dương, α là một số vô tỉ. Ta thừa nhận rằng luôn có một dãy số hữu tỉ (r_n) có giới hạn là α và dãy số tương ứng (a^{r_n}) có giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy số (r_n).

Ta gọi giới hạn của dãy số (a^{r_n}) là luỹ thừa của a với số mũ α, kí hiệu là a^{α}.

$$a^{\alpha} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} \text{ với } \alpha = \lim_{n\to+\infty} r_n .$$

Chú ý. Từ định nghĩa, ta có $1^{\alpha} = 1$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

II – TÍNH CHẤT CỦA LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

4

Hãy nhắc lại các tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Luỹ thừa với số mũ thực có các tính chất tương tự luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Cho a, b là những số thực dương ; α, β là những số thực tuỳ ý. Khi đó, ta có :

$$a^{\alpha}.\,a^{\beta} = a^{\alpha+\beta} \;;$$

$$\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta} \;;$$

$$(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta} \;;$$

$$(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha} \;;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}} ;$$

Nếu $a > 1$ thì $a^{\alpha} > a^{\beta}$ khi và chỉ khi $\alpha > \beta$.

Nếu $a < 1$ thì $a^{\alpha} > a^{\beta}$ khi và chỉ khi $\alpha < \beta$.

Ví dụ 6. Rút gọn biểu thức

$$E = \frac{a^{\sqrt{7}+1}.\,a^{2-\sqrt{7}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}} \qquad (a > 0).$$

Giải. Với $a > 0$, ta có

$$E = \frac{a^{\sqrt{7}+1+2-\sqrt{7}}}{a^{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}} = \frac{a^3}{a^{-2}} = a^5.$$

5

Rút gọn biểu thức $\dfrac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}.\,a^{4-\sqrt{5}}}$ $(a > 0)$.

Ví dụ 7. Không sử dụng máy tính, hãy so sánh các số $5^{2\sqrt{3}}$ và $5^{3\sqrt{2}}$.

Giải. Ta có $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$, $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$.

Do $12 < 18$ nên $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

Vì cơ số 5 lớn hơn 1 nên $5^{2\sqrt{3}} < 5^{3\sqrt{2}}$.

6

So sánh các số $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\sqrt{8}}$ và $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3}$.

Bài tập

1. Tính :

a) $9^{\frac{2}{5}}.27^{\frac{2}{5}}$;

b) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$;

c) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75} + 0,25^{-\frac{5}{2}}$;

d) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$.

2. Cho a, b là những số thực dương. Viết các biểu thức sau dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỉ :

a) $a^{\frac{1}{3}}.\sqrt{a}$;

b) $b^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{b}$;

c) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$;

d) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$.

3. Viết các số sau theo thứ tự tăng dần :

a) $1^{3,75}$; 2^{-1} ; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

b) 98^0 ; $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$; $32^{\frac{1}{5}}$.

4. Cho a, b là những số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$;

b) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}\left(\sqrt[5]{b^4} - \sqrt[5]{b^{-1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}}\right)}$;

c) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$;

d) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$.

5. Chứng minh rằng :

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}}$;

b) $7^{6\sqrt{3}} > 7^{3\sqrt{6}}$.