§1 NGUYÊN HÀM

I – NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1. Nguyên hàm

1

Tìm hàm số $F(x)$ sao cho $F'(x) = f(x)$ nếu :

a) $f(x) = 3x^2$ với $x \in (-\infty ; +\infty)$; b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ với $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng của $\mathbb{R}$.

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K.

Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Ví dụ 1

a) Hàm số $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x$ trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$ vì $F'(x) = (x^2)' = 2x$, $\forall x \in (-\infty ; +\infty)$.

b) Hàm số $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0 ; +\infty)$ vì $F'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in (0 ; +\infty)$.

2

Hãy tìm thêm những nguyên hàm khác của các hàm số nêu trong Ví dụ 1.

ĐỊNH LÍ 1

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

3

Hãy chứng minh Định lí 1.

ĐỊNH LÍ 2

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Chứng minh. Giả sử $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K, tức là $G'(x) = f(x)$, $x \in K$. Khi đó

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, x \in K.$$

Vậy $G(x) - F(x)$ là một hàm số không đổi trên K. Ta có

$$G(x) - F(x) = C \Rightarrow G(x) = F(x) + C, x \in K.$$ ■

Hai định lí trên cho thấy :

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Kí hiệu

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.}$$

CHÚ Ý

Biểu thức $f(x)\mathrm{d}x$ chính là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, vì $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 2

a) Với $x \in (-\infty\,;+\infty)$, $\int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$;

b) Với $s \in (0\,;+\infty)$, $\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \ln s + C$;

c) Với $t \in (-\infty\,;+\infty)$, $\int \cos t\mathrm{d}t = \sin t + C$.

2. Tính chất của nguyên hàm

TÍNH CHẤT 1

$$\boxed{\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C.}$$

Tính chất này được suy trực tiếp từ định nghĩa nguyên hàm.

Ví dụ sau đây minh hoạ cho tính chất đó.

Ví dụ 3. $\int(\cos x)'\mathrm{d}x = \int(-\sin x)\mathrm{d}x = \cos x + C.$

TÍNH CHẤT 2

$$\boxed{\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x} \qquad (k \text{ là hằng số khác } 0).$$

Chứng minh. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $kf(x)$, ta có

$$kf(x) = F'(x) \qquad (*)$$

Vì $k \neq 0$ nên $f(x) = \frac{1}{k}F'(x) = \left(\frac{1}{k}F(x)\right)'$.

Từ đó, theo tính chất 1 ta có

$$k\int f(x)\mathrm{d}x = k\int\left(\frac{1}{k}F(x)\right)'\mathrm{d}x = k\left(\frac{1}{k}F(x) + C_1\right) = F(x) + kC_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$

$= F(x) + C$ (vì C_1 tuỳ ý thuộc $\mathbb{R}$ và $k \neq 0$ nên $C = kC_1$ tuỳ ý thuộc $\mathbb{R}$)

$= \int kf(x)\mathrm{d}x$ (do (*)). ■

TÍNH CHẤT 3

$$\boxed{\int[f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x.}$$

4
Hãy chứng minh Tính chất 3.

Ví dụ 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\sin x + \frac{2}{x}$ trên khoảng $(0\,;+\infty)$.

Giải. Với $x \in (0\,;+\infty)$, ta có

$$\int\left(3\sin x + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = 3\int\sin x\mathrm{d}x + 2\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -3\cos x + 2\ln x + C.$$

3. Sự tồn tại nguyên hàm

Ta thừa nhận định lí dưới đây.

ĐỊNH LÍ 3

> Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

Ví dụ 5

a) Hàm số $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ có nguyên hàm trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$ và

$$\int x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C.$$

b) Hàm số $g(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ có nguyên hàm trên từng khoảng $(k\pi\ ;\ (k+1)\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$ và

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C.$$

4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

5

Lập bảng theo mẫu dưới đây rồi dùng bảng đạo hàm trang 77 và trong SGK Đại số và Giải tích 11 để điền các hàm số thích hợp vào cột bên phải.

$f'(x)$	$f(x) + C$
0	
$\alpha x^{\alpha-1}$	
$\dfrac{1}{x}$	
e^x	
$a^x \ln a\ (a > 0, a \neq 1)$	
$\cos x$	
$-\sin x$	
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	

Từ bảng các đạo hàm, ta có bảng nguyên hàm sau đây.

$\int 0\mathrm{d}x = C$	$\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C\ (a > 0, a \neq 1)$
$\int \mathrm{d}x = x + C$	$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$
$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$	$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$
$\int \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \tan x + C$
$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = -\cot x + C$

Ví dụ 6. Tính :

a) $\int \left(2x^2 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \mathrm{d}x$ trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$;

b) $\int (3\cos x - 3^{x-1}) \mathrm{d}x$ trên khoảng $(-\infty\ ;\ +\infty)$.

Giải

a) Với $x \in (0\ ;\ +\infty)$ ta có

$$\int \left(2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \mathrm{d}x = 2\int x^2 \mathrm{d}x + \int x^{-\frac{2}{3}} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x^{\frac{1}{3}} + C = \frac{2}{3}x^3 + 3\sqrt[3]{x} + C.$$

b) Với $x \in (-\infty\ ;\ +\infty)$ ta có

$$\int (3\cos x - 3^{x-1}) \mathrm{d}x = 3\int \cos x \mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int 3^x \mathrm{d}x$$

$$= 3\sin x - \frac{1}{3}\frac{3^x}{\ln 3} + C = 3\sin x - \frac{3^{x-1}}{\ln 3} + C.$$

CHÚ Ý

Từ đây, yêu cầu tìm nguyên hàm của một hàm số được hiểu là tìm nguyên hàm trên từng khoảng xác định của nó.

II – PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

6

a) Cho $\int (x-1)^{10}\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = x - 1$, hãy viết $(x-1)^{10}\mathrm{d}x$ theo u và $\mathrm{d}u$.

b) Cho $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$. Đặt $x = e^t$, hãy viết $\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ theo t và $\mathrm{d}t$.

ĐỊNH LÍ 1

Nếu $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

Chứng minh. Theo công thức đạo hàm của hàm hợp, ta có

$$(F(u(x)))' = F'(u).u'(x).$$

Vì $F'(u) = f(u) = f(u(x))$ nên $(F(u(x)))' = f(u(x))u'(x)$. ■

Như vậy, công thức $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$ đúng khi u là biến số độc lập thì cũng đúng khi u là một hàm số của biến số độc lập x.

HỆ QUẢ

Với $u = ax + b$ $(a \neq 0)$, ta có

$$\boxed{\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.}$$

Ví dụ 7. Tính $\int \sin(3x-1)\mathrm{d}x$.

Giải. Vì $\int \sin u\,\mathrm{d}u = -\cos u + C$ nên theo hệ quả ta có

$$\int \sin(3x-1)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos(3x-1) + C.$$

CHÚ Ý

Nếu tính nguyên hàm theo biến mới u $(u = u(x))$ thì sau khi tính nguyên hàm, ta phải trở lại biến x ban đầu bằng cách thay u bởi $u(x)$.

Ví dụ 8. Tính $\int \frac{x}{(x+1)^5}\mathrm{d}x$.

Giải. Đặt $u = x + 1$ thì $u' = 1$ và $\frac{x}{(x+1)^5}\mathrm{d}x$ được viết thành $\frac{u-1}{u^5}\mathrm{d}u$. Khi đó, nguyên hàm cần tính trở thành

$$\int \frac{u-1}{u^5}\mathrm{d}u = \int\left(\frac{1}{u^4} - \frac{1}{u^5}\right)\mathrm{d}u = \int u^{-4}\mathrm{d}u - \int u^{-5}\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}.\frac{1}{u^3} + \frac{1}{4}.\frac{1}{u^4} + C.$$

Thay $u = x + 1$ vào kết quả, ta được

$$\int \frac{x}{(x+1)^5}\mathrm{d}x = \frac{1}{(x+1)^3}\left(\frac{1}{4}.\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\right) + C.$$

2. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

7

Ta có $(x\cos x)' = \cos x - x\sin x$

hay $-x\sin x = (x\cos x)' - \cos x$.

Hãy tính $\int (x\cos x)'\mathrm{d}x$ và $\int \cos x\mathrm{d}x$. Từ đó tính $\int x\sin x\mathrm{d}x$.

ĐỊNH LÍ 2

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Chứng minh. Từ công thức đạo hàm của tích

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

hay $$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x),$$

ta có $$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int (u(x)v(x))'\mathrm{d}x - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Vậy $$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$ ■

CHÚ Ý

Vì $v'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$, $u'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, nên đẳng thức trên còn được viết ở dạng

$$\boxed{\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.}$$

Đó là công thức tính nguyên hàm từng phần.

Ví dụ 9. Tính

a) $\int xe^x dx$; b) $\int x\cos x dx$; c) $\int \ln x dx$.

Giải

a) Đặt $u = x$ và $dv = e^x dx$, ta có $du = dx$ và $v = e^x$. Do đó

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

b) Đặt $u = x$ và $dv = \cos x\, dx$, ta được $du = dx$ và $v = \sin x$. Vậy

$$\int x\cos x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx$$

hay

$$\int x\cos x\, dx = x\sin x + \cos x + C.$$

c) Đặt $u = \ln x$, $dv = dx$, ta có $du = \frac{1}{x}dx$ và $v = x$. Do đó

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

8

Cho $P(x)$ là đa thức của x. Từ Ví dụ 9, hãy lập bảng theo mẫu dưới đây rồi điền u và dv thích hợp vào ô trống theo phương pháp tính nguyên hàm từng phần.

	$\int P(x)e^x dx$	$\int P(x)\cos x dx$	$\int P(x)\ln x dx$
u	$P(x)$		
dv	$e^x dx$		

Bài tập

1. Trong các cặp hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số còn lại ?

a) e^{-x} và $-e^{-x}$; b) $\sin 2x$ và $\sin^2 x$;

c) $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x$ và $\left(1 - \frac{4}{x}\right)e^x$.

2. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}}$; b) $f(x) = \frac{2^x - 1}{e^x}$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}$;

d) $f(x) = \sin 5x.\cos 3x$;

e) $f(x) = \tan^2 x$;

g) $f(x) = e^{3-2x}$;

h) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)(1-2x)}$.

3. Sử dụng phương pháp đổi biến số, hãy tính :

a) $\int (1-x)^9 \, dx$ (đặt $u = 1 - x$) ;

b) $\int x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \, dx$ (đặt $u = 1 + x^2$) ;

c) $\int \cos^3 x \sin x \, dx$ (đặt $t = \cos x$) ;

d) $\int \dfrac{dx}{e^x + e^{-x} + 2}$ (đặt $u = e^x + 1$).

4. Sử dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, hãy tính :

a) $\int x \ln(1+x) dx$;

b) $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx$;

c) $\int x \sin(2x+1) dx$;

d) $\int (1-x)\cos x \, dx$.