§4 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

1. Căn bậc hai của số thực âm

Thế nào là căn bậc hai của số thực dương a ?

Tương tự căn bậc hai của một số thực dương, từ đẳng thức $i^2 = -1$, ta nói i là một căn bậc hai của -1 ; $-i$ cũng là một căn bậc hai của -1, vì $(-i)^2 = -1$. Từ đó, ta xác định được căn bậc hai của các số thực âm, chẳng hạn :

Căn bậc hai của -2 là $\pm i\sqrt{2}$, vì $(\pm i\sqrt{2})^2 = -2$;

Căn bậc hai của -3 là $\pm i\sqrt{3}$, vì $(\pm i\sqrt{3})^2 = -3$;

Căn bậc hai của -4 là $\pm 2i$, vì $(\pm 2i)^2 = -4$.

Tổng quát, các căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$.

2. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Xét biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ của phương trình. Ta thấy :

- Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = -\dfrac{b}{2a}$;
- Khi $\Delta > 0$, có hai căn bậc hai (thực) của Δ là $\pm\sqrt{\Delta}$ và phương trình có hai nghiệm thực phân biệt, được xác định bởi công thức

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a};$$

- Khi $\Delta < 0$ phương trình không có nghiệm thực vì không tồn tại căn bậc hai thực của Δ.

Tuy nhiên, trong trường hợp $\Delta < 0$, nếu xét trong tập hợp số phức, ta vẫn có hai căn bậc hai thuần ảo của Δ là $\pm i\sqrt{|\Delta|}$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức được xác định bởi công thức

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Ví dụ. Giải phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ trên tập hợp số phức.

Ta có $\Delta = 1 - 4 = -3$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phức là

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

NHẬN XÉT

Trên tập hợp số phức, mọi phương trình bậc hai đều có hai nghiệm (không nhất thiết phân biệt).

Tổng quát, người ta đã chứng minh được rằng mọi phương trình bậc n ($n \geq 1$)

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

trong đó $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$ đều có n nghiệm phức (các nghiệm không nhất thiết phân biệt).

Đó là định lí cơ bản của Đại số học.

Bài tập

1. Tìm các căn bậc hai phức của các số sau : -7 ; -8 ; -12 ; -20 ; -121.

2. Giải các phương trình sau trên tập hợp số phức :

   a) $-3z^2 + 2z - 1 = 0$; b) $7z^2 + 3z + 2 = 0$; c) $5z^2 - 7z + 11 = 0$.

3. Giải các phương trình sau trên tập hợp số phức :

   a) $z^4 + z^2 - 6 = 0$; b) $z^4 + 7z^2 + 10 = 0$.

4. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $az^2 + bz + c = 0$. Hãy tính $z_1 + z_2$ và $z_1.z_2$ theo các hệ số a, b, c.

5. Cho $z = a + bi$ là một số phức. Hãy tìm một phương trình bậc hai với hệ số thực nhận z và $\overline{z}$ làm nghiệm.

BÀI ĐỌC THÊM

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Phương trình đại số là phương trình dạng

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

trong đó n là một số nguyên dương ; $a_0, a_1, ..., a_n$ là các số đã cho và được gọi là các hệ số của phương trình, x là ẩn số. Nếu $a_0 \neq 0$ thì n là bậc của phương trình.

Việc nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình đại số và tìm công thức tính nghiệm của nó đã thu hút công sức của nhiều nhà toán học, trong nhiều thế kỉ. Chính từ những nghiên cứu đó đã ra đời ngành Đại số và thúc đẩy sự phát triển của nhiều lĩnh vực toán học khác.

Từ 2000 năm trước Công nguyên, người Ai Cập và người Babilon cổ đã biết giải các phương trình bậc nhất và một số trường hợp riêng của các phương trình bậc hai và bậc ba.

Lí thuyết giải phương trình bậc hai được trình bày lần đầu tiên trong cuốn sách "Số học" của Đi-ô-phăng (Diophantus), nhà bác học cổ Hi Lạp thế kỉ III. Cần chú ý rằng vấn đề có nghiệm của phương trình đại số luôn gắn với sự mở rộng các tập hợp số. Chẳng hạn, phương trình $x + 3 = 0$ không có nghiệm trong tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$, nhưng có nghiệm trong tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$. Phương trình $3x + 2 = 0$ không có nghiệm trong tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$, nhưng có nghiệm trong tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$.

Tổng quát, trên tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, mọi phương trình bậc nhất đều có nghiệm. Nhờ việc mở rộng từ tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ sang tập hợp các số thực $\mathbb{R}$, một lớp các phương trình bậc hai dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với biệt số $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ có nghiệm.

Công thức xác định nghiệm của phương trình bậc hai

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

đã được biết từ thế kỉ thứ VI và điều đó thúc đẩy các nhà toán học đi tìm công thức tính nghiệm của các phương trình bậc ba, bậc bốn,... Tuy nhiên, phải mười thế kỉ sau (thế kỉ XVI), công thức tính nghiệm của phương trình bậc ba và thuật toán giải phương trình bậc bốn mới được các nhà toán học I-ta-li-a tìm ra.

Nghiệm của phương trình bậc ba

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (*)$$

được cho bởi công thức sau (thường gọi là công thức Các-đa-nô) :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Các-đa-nô đã công bố công thức này năm 1545, trong quyển sách "Nghệ thuật lớn của phép giải các phương trình đại số".

Lẽ tự nhiên, ta coi biểu thức trên có nghĩa khi đại lượng $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ là không âm.

Đại lượng Δ cũng được gọi là biệt số của phương trình (*). Tuy nhiên, dễ chỉ ra những phương trình bậc ba với biệt số $\Delta < 0$, mà vẫn có nghiệm thực. Chẳng hạn, xét phương trình

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Phương trình này có ba nghiệm là –3, 1, 2 nhưng biệt số

$$\Delta = \frac{6^2}{4} + \frac{(-7)^3}{27} = -\frac{100}{27} < 0.$$

Điều đó dẫn đến việc thừa nhận rằng biểu thức

$$x = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}$$

là có nghĩa và các giá trị của nó là -3, 1, 2, mặc dù biểu thức này chứa căn bậc hai của một số thực âm.

Như chúng ta đã thấy, sự thừa nhận có các căn bậc hai của số thực âm, bắt đầu từ việc đặt $i = \sqrt{-1}$ đã dẫn đến sự ra đời của tập hợp các số phức.

Đồng thời với việc sáng tạo ra các số phức, người ta chứng minh được rằng mọi phương trình đại số bậc n ($n \geq 1$) với hệ số phức đều có n nghiệm phức (các nghiệm không nhất thiết phân biệt).

Như vậy, việc mở rộng các tập hợp số gắn với vấn đề có nghiệm của các phương trình đại số đã dừng lại ở tập hợp các số phức.

Tuy nhiên, các nhà toán học vẫn theo đuổi bài toán tìm công thức nghiệm dưới dạng biểu thức chứa căn thức cho các phương trình bậc lớn hơn hoặc bằng 5.

Gần 300 năm sau khi tìm ra công thức Các-đa-nô, năm 1826, A-ben (Abel), nhà toán học Na Uy đã chứng minh được rằng không có một công thức nghiệm như vậy cho các phương trình bậc lớn hơn hoặc bằng năm với hệ số bằng chữ. Hơn nữa, nhà toán học Pháp Ga-loa (Galois), năm 1830 còn giải được trọn vẹn bài toán : "Trong những điều kiện nào, một phương trình đại số giải được bằng căn thức ?". Công trình thiên tài của Ga-loa đặt nền móng cho sự phát triển của Đại số hiện đại.