§5 PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

I – PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Bài toán

Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu ?

Giải. Gọi số tiền gửi ban đầu là P. Sau n năm, số tiền thu được là

$$P_n = P(1 + 0{,}084)^n = P(1{,}084)^n.$$

Để $P_n = 2P$ thì phải có $(1{,}084)^n = 2$.

Do đó $$n = \log_{1{,}084} 2 \approx 8{,}59.$$

Vì n là số tự nhiên nên ta chọn $n = 9$.

Vậy muốn thu được gấp đôi số tiền ban đầu, người đó phải gửi 9 năm.

• Những bài toán thực tế như trên đưa đến việc giải các phương trình có chứa ẩn số ở số mũ của luỹ thừa. Ta gọi đó là các *phương trình mũ*.

Chẳng hạn, các phương trình $3^x = 8$, $\left(\frac{1}{9}\right)^x - \frac{4}{3^x} + 3 = 0$ là những phương trình mũ.

1. Phương trình mũ cơ bản

> Phương trình mũ cơ bản có dạng
>
> $$a^x = b \ (a > 0,\ a \neq 1).$$

Để giải phương trình trên, ta sử dụng định nghĩa lôgarit.

Với $b > 0$, ta có $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.

Với $b \leq 0$, phương trình vô nghiệm.

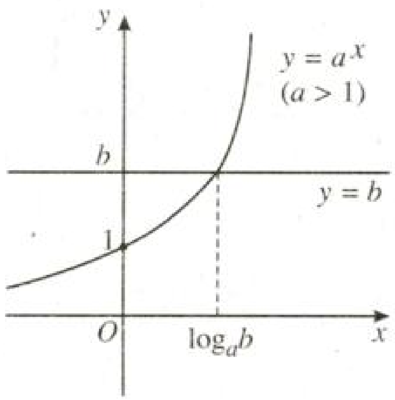
Minh hoạ bằng đồ thị

Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = a^x$ và $y = b$ là nghiệm của phương trình $a^x = b$.

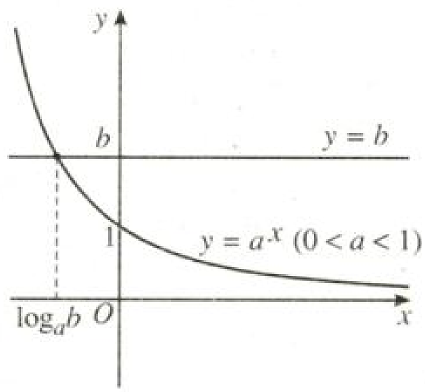
Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị.

Rõ ràng, nếu $b \leq 0$ thì hai đồ thị không cắt nhau nên phương trình vô nghiệm.

Nếu $b > 0$ ta có hai đồ thị trên các hình 37 và 38. Trên mỗi hình, hai đồ thị luôn cắt nhau tại một điểm nên phương trình có nghiệm duy nhất.



Hình 37



Hình 38

Kết luận

Phương trình $a^x = b \ (a > 0,\ a \neq 1)$	
$b > 0$	có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
$b \leq 0$	vô nghiệm.

Ví dụ 1. Giải phương trình $2^{2x-1} + 4^{x+1} = 5$.

Giải. Đưa vế trái về cùng cơ số 4, ta được

$$\frac{1}{2}.4^x + 4.4^x = 5 \text{ hay } 4^x = \frac{10}{9}.$$

Vậy $x = \log_4 \frac{10}{9}$.

2. Cách giải một số phương trình mũ đơn giản

Người ta thường sử dụng các phương pháp sau để giải một số phương trình mũ.

a) Đưa về cùng cơ số

1

Giải phương trình $6^{2x-3} = 1$ bằng cách đưa về dạng $a^{A(x)} = a^{B(x)}$ và giải phương trình $A(x) = B(x)$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $(1,5)^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$.

Giải. Đưa hai vế về cùng cơ số $\frac{3}{2}$, ta được

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{5x-7} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1}.$$

Do đó $5x - 7 = -x - 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) Đặt ẩn phụ

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$9^x - 4.3^x - 45 = 0.$$

Giải. Đặt $t = 3^x$, $t > 0$, ta có phương trình

$$t^2 - 4t - 45 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai này, ta được hai nghiệm $t_1 = 9$, $t_2 = -5$.

Chỉ có nghiệm $t_1 = 9$ thoả mãn điều kiện $t > 0$.

Do đó $3^x = 9$. Vậy $x = 2$.

2

Giải phương trình $\frac{1}{5}.5^{2x} + 5.5^x = 250$ bằng cách đặt ẩn phụ $t = 5^x$.

c) Lôgarit hoá

Ví dụ 4. Giải phương trình $3^x.2^{x^2} = 1$.

Giải. Lấy lôgarit hai vế với cơ số 3 (còn gọi là **lôgarit hoá**), ta được

$$\log_3(3^x.2^{x^2}) = \log_3 1 \Leftrightarrow \log_3 3^x + \log_3 2^{x^2} = 0.$$

Từ đó ta có

$$x + x^2\log_3 2 = 0 \Leftrightarrow x(1 + x\log_3 2) = 0.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là

$$x_1 = 0 \text{ và } x_2 = -\frac{1}{\log_3 2} = -\log_2 3.$$

II – PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Phương trình lôgarit là phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit.

Chẳng hạn, các phương trình

$$\log_{\frac{1}{2}} x = 4 \text{ và } \log_4^2 x - 2\log_4 x + 1 = 0$$

đều là phương trình lôgarit.

1. Phương trình lôgarit cơ bản

3

Tính x, biết $\log_3 x = \frac{1}{4}$.

Phương trình lôgarit cơ bản có dạng

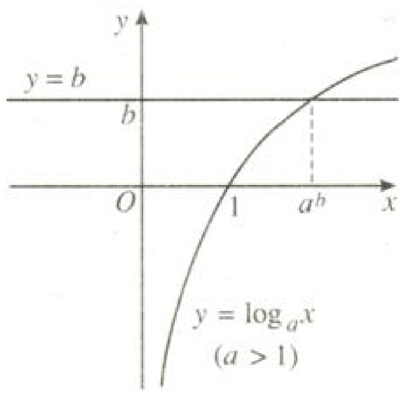
$$\log_a x = b \ (a > 0, a \neq 1).$$

Theo định nghĩa lôgarit, ta có

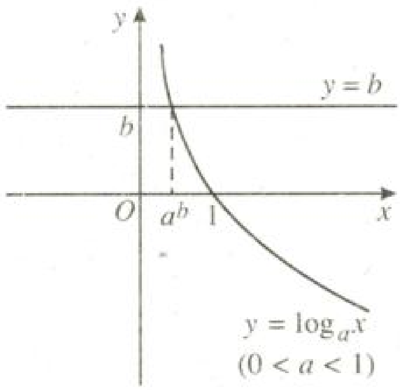
$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b.$$

Minh hoạ bằng đồ thị

Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và đường thẳng $y = b$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H. 39 và H. 40).



Hình 39



Hình 40

Trong cả hai trường hợp, ta đều thấy đồ thị của các hàm số $y = \log_a x$ và đường thẳng $y = b$ luôn cắt nhau tại một điểm với mọi $b \in \mathbb{R}$.

KẾT LUẬN

> Phương trình $\log_a x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$ luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$ với mọi b.

2. Cách giải một số phương trình lôgarit đơn giản

Người ta thường sử dụng các phương pháp sau để giải một số phương trình lôgarit.

a) Đưa về cùng cơ số

4

Cho phương trình $\log_3 x + \log_9 x = 6$. Hãy đưa các lôgarit ở vế trái về cùng cơ số.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$.

Giải. Đưa các số hạng ở vế trái về cùng cơ số 3, ta được

$$\log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = 11$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 x = 11 \Leftrightarrow \log_3 x = 6.$$

Vậy $x = 3^6 = 729$.

b) Đặt ẩn phụ

5

Giải phương trình $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$ bằng cách đặt ẩn phụ $t = \log_2 x$.

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1.$$

Giải. Điều kiện của phương trình là $x > 0$, $\log x \neq 5$ và $\log x \neq -1$.

Đặt $t = \log x$ $(t \neq 5, t \neq -1)$, ta được phương trình

$$\frac{1}{5 - t} + \frac{2}{1 + t} = 1.$$

Từ đó ta có phương trình

$$1 + t + 2(5 - t) = (5 - t)(1 + t)$$

$$\Leftrightarrow -t + 11 = -t^2 + 4t + 5 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai theo t, ta được hai nghiệm $t_1 = 2$, $t_2 = 3$ đều thoả mãn điều kiện $t \neq 5, t \neq -1$.

Vậy $\log x_1 = 2$, $\log x_2 = 3$ nên $x_1 = 100$, $x_2 = 1000$.

6

Giải phương trình $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_2^2 x = 2$.

c) Mũ hoá

Ví dụ 7. Giải phương trình $\log_2(5-2^x) = 2-x$.

Điều kiện của phương trình là $5-2^x > 0$.

Giải. Theo định nghĩa, phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$2^{\log_2(5-2^x)} = 2^{2-x}.$$

(Phép biến đổi này thường được gọi là **mũ hoá**). Từ đó ta có

$$5-2^x = \frac{4}{2^x} \Leftrightarrow 2^{2x} - 5.2^x + 4 = 0.$$

Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$, ta có phương trình bậc hai $t^2 - 5t + 4 = 0$ với hai nghiệm dương $t = 1$, $t = 4$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 0$, $x = 2$.

Bài tập

1. Giải các phương trình mũ :

a) $(0,3)^{3x-2} = 1$; b) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$;

c) $2^{x^2-3x+2} = 4$; d) $(0,5)^{x+7}.(0,5)^{1-2x} = 2$.

2. Giải các phương trình mũ :

a) $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$; b) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$;

c) $64^x - 8^x - 56 = 0$; d) $3.4^x - 2.6^x = 9^x$.

3. Giải các phương trình lôgarit :

a) $\log_3(5x+3) = \log_3(7x+5)$;

b) $\log(x-1) - \log(2x-11) = \log 2$;

c) $\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3$;

d) $\log(x^2-6x+7) = \log(x-3)$.

4. Giải các phương trình lôgarit :

a) $\frac{1}{2}\log(x^2 + x - 5) = \log 5x + \log\frac{1}{5x}$;

b) $\frac{1}{2}\log(x^2 - 4x - 1) = \log 8x - \log 4x$;

c) $\log_{\sqrt{2}} x + 4\log_4 x + \log_8 x = 13$.