§1 SỐ PHỨC

1. Số i

Ta đã biết các phương trình bậc hai với biệt số âm không có nghiệm thực. Phương trình bậc hai đơn giản nhất không có nghiệm thực là phương trình

$$x^2 + 1 = 0.$$

Với mong muốn mở rộng tập hợp số thực để mọi phương trình bậc n đều có nghiệm, người ta đưa ra một số mới, kí hiệu là i và coi nó là nghiệm của phương trình trên. Như vậy

$$\boxed{i^2 = -1.}$$

2. Định nghĩa số phức

> Mỗi biểu thức dạng $a + bi$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$ được gọi là một **số phức**.
>
> Đối với số phức $z = a + bi$, ta nói a là **phần thực**, b là **phần ảo** của z.
>
> Tập hợp các số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Ví dụ 1. Các số sau là những số phức :

$2 + 5i$; $-\sqrt{2} + 3i$; $1 + (-3)i$ (còn viết là $1 - 3i$); $1 + \sqrt{3}i$ (còn viết là $1 + i\sqrt{3}$).

1

Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau : $-3 + 5i$, $4 - i\sqrt{2}$, $0 + \pi i$, $1 + 0i$.

3. Số phức bằng nhau

Hai số phức là **bằng nhau** nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$\boxed{a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ và } b = d.}$$

Ví dụ 2. Tìm các số thực x và y, biết

$$(2x+1)+(3y-2)i=(x+2)+(y+4)i.$$

Giải. Từ định nghĩa của hai số phức bằng nhau, ta có

$$2x+1=x+2 \text{ và } 3y-2=y+4.$$

Vậy $x=1$ và $y=3$.

CHÚ Ý

• Mỗi số thực a được coi là một số phức với phần ảo bằng 0

$a=a+0i.$

Như vậy, *mỗi số thực cũng là một số phức*. Ta có $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

• Số phức $0+bi$ được gọi là **số thuần ảo** và viết đơn giản là bi

$$bi=0+bi.$$

Đặc biệt $\qquad i=0+1i.$

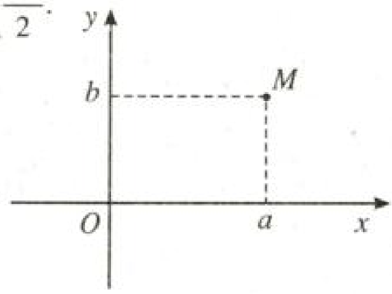
Số i được gọi là **đơn vị ảo**.

2

Viết số phức z có phần thực bằng $\frac{1}{2}$, phần ảo bằng $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Biểu diễn hình học số phức

Như trên đã thấy, mỗi số phức $z=a+bi$ hoàn toàn được xác định bởi cặp số thực $(a\,;\,b)$.



Hình 67

Điểm $M(a\,;\,b)$ trong một hệ toạ độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là **điểm biểu diễn số phức** $z=a+bi$ (H.67).

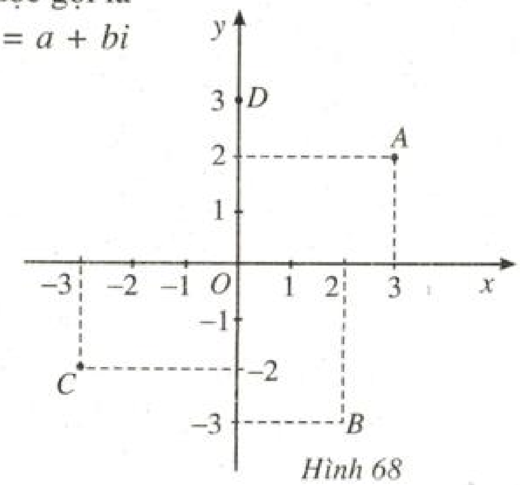
Ví dụ 3. (H.68)

Điểm A biểu diễn số phức $3+2i$;

Điểm B biểu diễn số phức $2-3i$;

Điểm C biểu diễn số phức $-3-2i$;

Điểm D biểu diễn số phức $3i$.



Hình 68

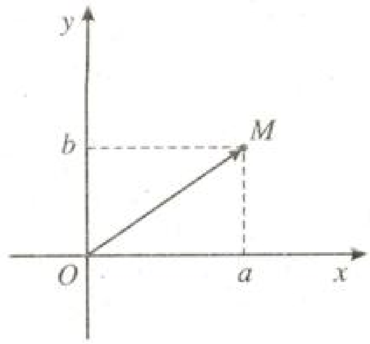
3

a) Biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ các số phức sau : $3 - 2i$, $-4i$, 3.

b) Các điểm biểu diễn số thực, số thuần ảo nằm ở đâu trên mặt phẳng toạ độ ?

5. Môđun của số phức

Giả sử số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a\ ;\ b)$ trên mặt phẳng toạ độ (H.69).



Hình 69

> Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là **môđun của số phức** z và kí hiệu là $|z|$.
>
> Vậy
>
> $|z| = |\overrightarrow{OM}|$ hay $|a + bi| = |\overrightarrow{OM}|$.

Dễ thấy $\boxed{|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.}$

Ví dụ 4

$$|3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}\ ;$$

$$\left|1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

4

Số phức nào có môđun bằng 0 ?

6. Số phức liên hợp

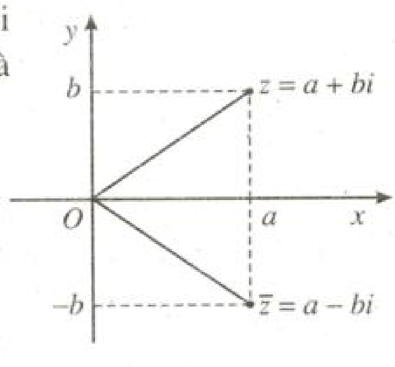
5

Biểu diễn các cặp số phức sau trên mặt phẳng toạ độ và nêu nhận xét :

a) $2+3i$ và $2-3i$;

b) $-2+3i$ và $-2-3i$.

> Cho số phức $z = a + bi$. Ta gọi $a - bi$ là **số phức liên hợp** của z và kí hiệu là $\overline{z} = a - bi$.



Hình 70

Ví dụ 5

$z = -3 + 2i$; $\overline{z} = -3 - 2i$;

$z = 4 - 3i$; $\overline{z} = 4 + 3i$.

Trên mặt phẳng toạ độ, các điểm biểu diễn z và $\overline{z}$ đối xứng với nhau qua trục Ox (H.70).

6
Cho $z = 3 - 2i$.

a) Hãy tính $\overline{z}$ và $\overline{\overline{z}}$. Nêu nhận xét.

b) Tính $|z|$ và $|\overline{z}|$. Nêu nhận xét.

Từ định nghĩa ta có :

- $\overline{\overline{z}} = z$;
- $|\overline{z}| = |z|$.

BẠN CÓ BIẾT

CÁC- ĐA-NÔ (G.CARDANO)

Các-đa-nô là một nhà bác học người I-ta-li-a. Ông sinh năm 1501, đạt học vị tiến sĩ y khoa năm 1526, nhưng không được hành nghề y mà trở thành thầy giáo dạy toán. Ông có trên 200 công trình về các lĩnh vực Toán học, Y học, Triết học, Thiên văn học, Âm nhạc và Thần học. Năm 1545 ông xuất bản quyển sách "Nghệ thuật lớn của phép giải các phương trình đại số". Trong cuốn sách này, ông trình bày cách giải phương trình bậc ba, bậc bốn và đề cập tới căn bậc hai của số âm. Có thể nói sự nghiên cứu số phức khởi nguồn từ công trình này.

G. Cardano
(1501 – 1576)

Bài tập

1. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z, biết :

a) $z = 1 - \pi i$; b) $z = \sqrt{2} - i$;

c) $z = 2\sqrt{2}$; d) $z = -7i$.

2. Tìm các số thực x và y, biết :

a) $(3x - 2) + (2y + 1)i = (x + 1) - (y - 5)i$;

b) $(1 - 2x) - i\sqrt{3} = \sqrt{5} + (1 - 3y)i$;

c) $(2x + y) + (2y - x)i = (x - 2y + 3) + (y + 2x + 1)i$.

3. Trên mặt phẳng toạ độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện :

a) Phần thực của z bằng -2 ;

b) Phần ảo của z bằng 3 ;

c) Phần thực của z thuộc khoảng $(-1 ; 2)$;

d) Phần ảo của z thuộc đoạn $[1 ; 3]$;

e) Phần thực và phần ảo của z đều thuộc đoạn $[-2 ; 2]$.

4. Tính $|z|$ với :

a) $z = -2 + i\sqrt{3}$;

b) $z = \sqrt{2} - 3i$;

c) $z = -5$;

d) $z = i\sqrt{3}$.

5. Trên mặt phẳng toạ độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện :

a) $|z| = 1$;

b) $|z| \le 1$;

c) $1 < |z| \le 2$;

d) $|z| = 1$ và phần ảo của z bằng 1.

6. Tìm $\overline{z}$, biết :

a) $z = 1 - i\sqrt{2}$;

b) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{3}$;

c) $z = 5$;

d) $z = 7i$.